Een inleiding in de coöperatieve speltheorie

Marieke Quant
Herbert Hamers
Elleke Janssen

TILBURG UNIVERSITY

Voorwoord

Tilburg, februari 2012

Dit dictaat geeft een inleiding in de coöperatieve speltheorie en kan gebruikt worden als extra materiaal bij het vak wiskunde B (6 lesuren). Het dictaat is geschreven voor 5 en 6 VWO scholieren die meer weer willen over coöperatieve speltheorie.

Dit dictaat is tot stand gekomen door intensieve samenwerking met de volgende VO docenten:

Ad van der Vrande	2 College Cobbenhagen
Cor Eijkemans	Koning Willem II College
Wenda Hilhorst	Koning Willem II College
Hans de Swart	Koning Willem II College
Harry de Leuw	Theresialyceum
Hans Vermeer	Theresialyceum
Eric Mulders	Sint Odulphuslyceum
Bert Wennekes	Sint Odulphuslyceum
Ad Verschuren	Mill Hill College
Jan Kolen	Mill Hill College
Maurice Hogerbrugge	Stedelijk Gymnasium Den Bosch
Barbara Bialecka	ROC Tilburg
Willy Graafmans	Beatrixcollege
Jac van der Krabben	Beatrixcollege

Wij bedanken hen voor de coöperatieve instelling, de waardevolle opmerkingen en suggesties voor opgaven.

Informatie wiskunde B/D op de UvT:

In 2007 is op de Universiteit van Tilburg een projectteam begonnen met het project 'wiskunde D op de UvT'. Dit team heeft onder andere dictaten ontwikkeld die voor het vrije deel van wiskunde D gebruikt kunnen worden. In 2009 is dit project uitgebreid: ook voor het vak wiskunde B zijn dictaten ontwikkeld, die gebruikt kunnen worden voor verdieping van bestaande onderwerpen of toepassing van bekende wiskunde op nieuwe onderwerpen.

Voor meer informatie kunt u kijken op www.uvt.nl/wiskundeb en www.uvt.nl/wiskunded. U kunt ook contact opnemen met de projectleider, prof. dr. Herbert Hamers (H.J.M.Hamers@uvt.nl).

Inhoudsopgave

1

Coöperatieve spelen

1.1 Introductie

Voorbeeld 1.1: marktplaats: samenwerken

Bas wil zijn mobiele telefoon via marktplaats verkopen, maar helaas is hij niet meer in het bezit van de bijbehorende oplader. Chris zit met het omgekeerde probleem: zijn accu van de telefoon heeft het begeven, maar de oplader is nog prima en die zou hij via marktplaats te koop aan kunnen bieden. Een mobieltje zonder oplader, of een oplader zonder mobiele telefoon, levert geen geld op als deze op marktplaats te koop wordt aangeboden. Een set van mobiele telefoon met oplader kan verkocht worden voor 15 euro. Bas en Chris kunnen door in één advertentie het mobieltje en de oplader aan te bieden 15 euro verdienen. Als ze niet samenwerken verdienen ze allebei niets. ◀

We willen bovenstaande situatie weergeven met behulp van een wiskundig model. In dit model moet naar voren komen wat Bas en Chris kunnen verdienen als ze niet samenwerken en wat ze verdienen als ze wel samenwerken. Daarnaast willen we met behulp van dit model bekijken hoe Bas en Chris de 15 euro, die ze verdienen als ze samenwerken, onderling kunnen verdelen. Het blijkt dat deze situatie en vele andere situaties met behulp van speltheorie te beschrijven zijn. Voordat we met deze zogenaamde speltheorie aan de slag kunnen gaan, moeten we eerst een idee krijgen over wat speltheorie nu eigenlijk inhoudt.

De situaties die met behulp van speltheorie geanalyseerd kunnen worden, zijn situaties waarin tenminste twee partijen (in bovenstaand voorbeeld Bas en Chris) keuzes moeten maken. Hierbij houdt speltheorie zich vooral bezig met de wiskundige taal die deze situaties beschrijft. Het doel en de daarbij behorende uitdaging is om deze wiskundige modellen, ook wel "spelen" genoemd, zo te maken dat alle belangrijke aspecten van de onderliggende problemen weergegeven worden en deze modellen dan vervolgens te analyseren. Zo zal bijvoorbeeld in het model van de bovenstaande situatie naar voren moeten komen wat de "spelers" (Bas en Chris) kunnen verdienen als ze niet samenwerken en wat ze verdienen als ze wel samenwerken. Daarnaast is het van belang om te kijken naar de vraag hoe ze de 15 euro, die ze verdienen als ze samenwerken, onderling kunnen verdelen.

In de speltheorie zijn er twee benaderingen mogelijk: niet-coöperatieve speltheorie en coöperatieve speltheorie. De hierboven beschreven situatie is een voorbeeld van coöperatieve speltheorie. Coöperatieve speltheorie houdt zich bezig met situaties waarin de partijen, ook wel "spelers" genoemd, afspraken maken over mogelijke samenwerking. In dit hoofdstuk worden coöperatieve spelen geïntroduceerd. Deze spelen bevatten dus informatie over de winst die spelers kunnen behalen door samen te werken. Een ander voorbeeld van een coöperatief spel kan gevonden worden bij het al dan niet samenwerken van bedrijven. Als bedrijven samenwerken kunnen zij in het algemeen meer winst behalen. Dit is eenvoudig voor te stellen als je bedenkt dat bedrijven door samen te werken efficiënter kunnen omgaan met bijvoorbeeld arbeidskrachten en machines om zodoende kosten te besparen. Deze kostenbesparingen leiden uiteindelijk tot een grotere winst. Een belangrijk aspect in de coöperatieve theorie is de vraag hoe de uiteindelijke winst of de bespaarde kosten verdeeld moeten worden als er daadwerkelijk samengewerkt wordt.

Naast coöperatieve speltheorie bestaat er ook de zogenaamde niet-coöperatieve speltheorie. Hierin worden situaties bestudeerd waarin spelers proberen het zelf zo goed mogelijk te doen, maar hierbij afhankelijk zijn van de beslissingen van anderen. Je kunt hierbij bijvoorbeeld denken aan een supermarkt die de keuze heeft om wel of niet te stunten met zijn prijzen. De winst die de supermarkt uiteindelijk behaalt, hangt niet alleen af van zijn eigen keuze, maar ook van de keuze die andere supermarkten maken met betrekking tot hun prijzen. Een belangrijk aspect van niet-coöperatieve speltheorie is het beschrijven en analyseren van de verschillende strategieën van alle spelers en proberen voor elke speler een "optimale" strategie te vinden.

In dit boek zullen wij een eerste introductie geven in de coöperatieve speltheorie.

1.2 Coöperatieve speltheorie

Speltheorie gebruikt en ontwikkelt wiskundige technieken om coöperatief gedrag te bestuderen. In deze sectie bestuderen we een aantal verschillende situaties die gemodelleerd kunnen worden met behulp van een coöperatief spel.

Voorbeeld 1.2: Peters bromfietsenbedrijf: een verdeelprobleem

Peter is na zijn eindexamen een eigen bromfietsenbedrijf gestart. Helaas loopt het bedrijf niet zo goed als gedacht en na drie maanden gaat zijn bedrijf failliet. Na dit faillissement is er nog een vermogen van 400 euro over om de schuldeisers te betalen. Er zijn echter drie schuldeisers, de eerste eist 100 euro, de tweede 200 euro en de derde 300 euro. In totaal is dit meer dan de beschikbare 400 euro. Hoe moet deze 400 euro verdeeld worden onder de drie schuldeisers?

Hoe verschillend de situatie van Peters bromfietsenbedrijf en de situatie beschreven in het voorbeeld **marktplaats** in eerste instantie misschien lijken, toch kunnen beide situaties in eenzelfde soort wiskundig model worden gegoten. We gebruiken hierbij coöperatieve speltheorie. Algemeen gesproken kunnen situaties waarin bedrijven of personen winst kunnen behalen of kosten kunnen besparen door samen te werken, gemodelleerd worden met behulp van een coöperatief spel. De bedrijven of personen die een rol spelen noemen we de spelers van het spel. Deze spelers nummeren we voor het gemak van 1 tot en met n, waarbij n een positief geheel getal is dat het totale aantal bedrijven of personen aangeeft. De verzameling van alle spelers geven we aan met N.

Verzamelingen kunnen we ook weergeven met accolades, zo is $\{1, \ldots, n\}$ een alternatieve notatie voor de spelersverzameling N. In een coöperatief spel wordt weergegeven welke winst of kostenbesparing een willekeurige groep van spelers (dus niet alleen alle spelers bij elkaar) kan behalen. Een willekeurige groep spelers geven we aan met S, we noemen S ook wel een deelverzameling van N, omdat alle spelers die in S zitten, ook in N zitten. De lege verzameling is een verzameling waarin geen spelers zitten en wordt ook wel genoteerd met $\emptyset$. In de appendix is een compleet overzicht van notaties met betrekking tot verzamelingen te vinden.

Voorbeeld 1.3: deelverzamelingen

Stel we hebben een spel met twee spelers, dan geldt $N = \{1,2\}$. Nu is bijvoorbeeld $S = \{1\}$ een deelverzameling van deze groep bestaande uit speler 1. In totaal zijn er vier deelverzamelingen van $\{1,2\}$: de verzamelingen $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ en $\{1,2\}$. ◀

Opgave 1.1

a) Laat $N = \{1,2,3\}$. Geef alle mogelijke deelverzamelingen van N.
b) Wat is het verband tussen het totale aantal deelverzamelingen van een spelersgroep bestaande uit drie en een spelersgroep bestaande uit twee spelers? Kun je dit verband uitdrukken in een formule?
c) Hoeveel deelverzamelingen heeft de verzameling $N = \{1,2,3,4\}$?
d) Hoeveel deelverzamelingen heeft de verzameling $N = \{1,\ldots,n\}$? (Hint: je kunt deze opgave ook zien als een telprobleem, waarbij er voor iedere speler twee mogelijkheden zijn: deze speler zit wel of deze speler zit niet in de deelverzameling).

Wanneer we alle deelverzamelingen van N hebben gevonden, kunnen we voor elke deelverzameling van spelers nagaan hoeveel winst deze kan behalen. De winst/kostenbesparing die een groep spelers S zichzelf kan garanderen, wordt weergegeven met $v(S)$.

Voorbeeld 1.4: marktplaats: een coöperatief spel

We kunnen de situatie van het voorbeeld **marktplaats** als volgt modelleren: we noemen Bas speler 1 en Chris speler 2, dan is $N = \{1,2\}$. Bas bezit alleen een mobiele telefoon en Chris bezit alleen een oplader. Er geldt dat $v(\{1\}) = 0$, $v(\{2\}) = 0$ en $v(N) = 15$. Of in tabelvorm:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	0	0	15

We merken op dat we in de tabel, die voor elke coalitie de waarde van het coöperatieve spel weergeeft, de lege coalitie (dat is de coalitie zonder spelers) niet weergeven. Per definitie heeft deze coalitie altijd de waarde nul en daarom wordt deze in tabellen weggelaten. ◀

In de volgende box staat de definitie van een coöperatief spel.

Coöperatief spel

Een coöperatief spel wordt beschreven door een paar (N,v), waarbij $N = \{1,2,...,n\}$ de verzameling van spelers is en v een functie is die aan elke deelverzameling S van N een getal toekent.

Het getal $v(S)$ noemen we de waarde van coalitie S en kan geïnterpreteerd worden als de maximale winst die de spelers uit S (zonder de hulp van spelers buiten S) kunnen verkrijgen door samen te werken. We nemen aan dat de waarde van de lege verzameling, $v(\emptyset)$, gelijk is aan nul. Een deelverzameling S van N wordt een coalitie genoemd en N wordt de grote coalitie genoemd.

Voorbeeld 1.5: Peters bromfietsenbedrijf: een coöperatief spel

Ook de situatie van het faillissement van Peters bromfietsenbedrijf kunnen we modelleren met behulp van een coöperatief spel, waarbij de schuldeisers de spelers zijn. Speler 1, 2 en 3 eisen dus respectievelijk 100, 200 en 300 euro van de beschikbare 400 euro. De waarde $v(S)$ van een coalitie S geeft aan welk bedrag deze coalitie kan krijgen zonder hulp van spelers buiten S. We interpreteren dit als het gedeelte van het totale beschikbare bedrag dat een coalitie zichzelf kan garanderen. De vraag is natuurlijk: wat kan een coalitie zichzelf garanderen?

We nemen aan dat een eiser nooit meer kan krijgen dan zijn volledige claim. Dit betekent dat een coalitie S altijd tenminste recht heeft op het gedeelte van het totale beschikbare bedrag dat overblijft als alle spelers buiten S hun volledige claim krijgen toegewezen. Dit is het bedrag dat een coalitie zich kan garanderen. Als de spelers buiten S samen evenveel of meer eisen dan het totale beschikbare bedrag, dan kan coalitie S zich blijkbaar geen bedrag garanderen en is $v(S) = 0$ (immers $v(S)$ kan niet negatief zijn, in het ergste geval ziet een coalitie niets terug van zijn totale claim).

Bekijk bijvoorbeeld de coalitie $S = \{1,2\}$. Omdat speler 3 een bedrag van 300 euro eist, blijft er voor coalitie S altijd minstens $400 - 300 = 100$ euro over, dus $v(\{1,2\}) = 100$. Voor de coalitie $S = \{1\}$ geldt dat speler 2 en 3 samen meer eisen dan de beschikbare 400 euro, dus $v(\{1\}) = 0$. Verder geldt $v(N) = 400$, immers er zijn geen spelers buiten N, dus samen zullen de spelers uit N altijd 400 euro krijgen. In tabelvorm hebben we dus het volgende gevonden:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	100	100	200	300	400

◀

Opgave 1.2

a) Bepaal het bijbehorende spel als het beschikbare bedrag niet 400, maar 200 euro is en de schuldeisers respectievelijk 100, 200 en 300 euro eisen.
b) Bepaal het bijbehorende spel als het beschikbare bedrag 400 euro is en de claims gelijk zijn aan respectievelijk 200, 200 en 300 euro.

Voorbeeld 1.6: een handschoenenspel: een coöperatief spel

Bekijk twee bedrijven die beide linker- en rechterhandschoenen produceren. Een paar handschoenen is 5 euro waard, maar een enkele linker- of rechterhandschoen is niets waard. Bedrijf 1 produceert vijf linker- en zeven rechterhandschoenen bedrijf 2 produceert negen linker- en zes rechterhandschoenen. Bedrijf 1 kan zelf vijf paar handschoenen verkopen. Daarom is zijn opbrengst gelijk aan 25 $(= 5 \cdot 5)$ euro. Bedrijf 2 kan zes paar handschoenen verkopen met een opbrengst van 30 $(= 6 \cdot 5)$ euro. Echter als de twee bedrijven besluiten samen te werken, kunnen ze dertien paar handschoenen verkopen met een bijbehorende opbrengst van 65 $(= 13 \cdot 5)$ euro. Deze situatie kan gemodelleerd worden als een coöperatief spel (N, v) met $N = \{1,2\}$ en v zoals in onderstaande tabel weergegeven:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	25	30	65

◀

Opgave 1.3

Bekijk drie bedrijven die linker- en rechterhandschoenen produceren volgens het volgende schema:

bedrijf	rechts	links
1	4	7
2	9	12
3	8	4

De opbrengst van een paar handschoenen is 5 euro. Bepaal het bijbehorende coöperatieve spel.

Voorbeeld 1.7: klassenvertegenwoordigers: een coöperatief spel

In 4Va moeten één of meerdere leerlingen aangewezen worden om de klas te vertegenwoordigen. Drie leerlingen, Annemiek, Hans en Herbert, hebben aangegeven wel interesse te hebben. Alle 31 leerlingen van de klas mogen stemmen op één van deze drie leerlingen. De uitslag van de stemming is als volgt: Annemiek 17, Hans 4 en Herbert 10 stemmen. We gaan deze uitkomst met behulp van een coöperatief spel modelleren. We noemen Annemiek speler 1, Hans speler 2 en Herbert speler 3. Als een groep spelers de meerderheid van de stemmen heeft dan wordt aan deze groep de waarde 1 gegeven. Als een groep geen meerderheid heeft, dan krijgt deze groep de waarde 0. Er geldt dus bijvoorbeeld $v(\{1\}) = 1$, immers Annemiek heeft 17 stemmen en dat is meer dan de helft. En $v(\{2,3\}) = 0$, want Hans en Herbert hebben samen 14 stemmen, wat minder is dan de helft. Het complete spel dat bovenstaande stemming weergeeft, is gelijk aan:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	1	0	0	1	1	0	1

◀

Opgave 1.4

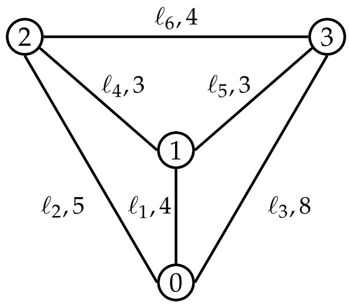
Na de laatste gemeenteraadsverkiezingen is er in een gemeente de volgende zetelverdeling onstaan:

PvdA	CDA	VVD	lokale partij
8	6	4	3

Aan een coalitie van partijen die een meerderheid aan zetels heeft wordt een 1 toegekend, aan een coalitie die geen meerderheid heeft een 0. Bepaal het spel dat de informatie bevat met betrekking tot de uitslag van deze verkiezing.

Voorbeeld 1.8: elektriciteitsnet: een kostenbesparingsspel

De bedrijven 1, 2, en 3 willen alle verbonden worden via een netwerk met een elektriciteitscentrale. Dit netwerk moet echter nog ontwikkeld worden. Ieder bedrijf kan direct of via een ander bedrijf verbonden worden met het centrale elektriciteitsnet. Om een weloverwogen keuze te maken hebben de bedrijven eerst uitgezocht hoe duur elke mogelijke verbinding is. De kosten zijn weergegeven in figuur 1.1, waarbij het punt 0 de plaats van de elektriciteitscentrale weergeeft.



Figuur 1.1: Netwerkverbindingen.

Met behulp van figuur 1.1 kunnen we voor iedere coalitie het goedkoopste netwerk vinden dat alle bedrijven van deze coalitie met de elektriciteitscentrale verbindt. Bijvoorbeeld, de bedrijven 1 en 2 kunnen op drie verschillende manieren met de elektriciteitscentrale verbonden worden: via de lijnen ℓ_1 en ℓ_2, via de lijnen ℓ_2 en ℓ_4, of via de lijnen ℓ_1 en ℓ_4. Merk op dat een coalitie geen gebruik kan maken van verbindingen/lijnen die leiden naar een bedrijf buiten de coalitie. Omdat bedrijf 3 niet in deze coalitie zit, kunnen de verbindingen met dit bedrijf dus niet gebruikt worden. De kosten van de lijnen ℓ_1 en ℓ_2 zijn $5+4=9$, de kosten van de lijnen ℓ_2 en ℓ_4 zijn $5+3=8$ en de kosten van de lijnen ℓ_1 en ℓ_4 zijn $3+4=7$. Dus de kosten van het goedkoopste netwerk voor de bedrijven 1 en 2 samen zijn gelijk aan 7. Als de bedrijven 1 en 2 niet samenwerken hebben ze respectievelijke kosten van 4 en 5. Door samen te werken komen deze bedrijven tot een kostenbesparing van 2.

We kunnen deze situatie als volgt met een coöperatief spel modelleren. We nemen als spelersverzameling $N = \{1,2,3\}$. Definieer de functie v als volgt: de waarde van een coalitie is het verschil tussen de individuele kosten van de bedrijven in deze coalitie (dat wil zeggen kosten die er zijn zonder dat er samengewerkt wordt) en de minimale kosten van de coalitie (dat wil zeggen de kosten van het goedkoopste netwerk als er wel wordt samengewerkt). In de tweede rij van tabel 1.1 zijn de kosten van iedere coalitie gegeven als er niet samengewerkt wordt. De derde rij van tabel 1.1 bevat de kosten van het goedkoopste netwerk van elke coalitie. De functiewaarden van v zijn gegeven in de vierde rij van tabel 1.1 en kunnen gemakkelijk afgeleid worden door de getallen uit de derde rij af te trekken van de getallen uit de tweede rij. Bijvoorbeeld, $v(\{1,2\}) =$ (kosten van $\{1\}$ + kosten van $\{2\}$) $-$(kosten van $\{1,2\}$) $= 5+4-7 = 2$, en op eenzelfde manier, $v(\{1,2,3\}) = 4+5+8-10 = 7$.

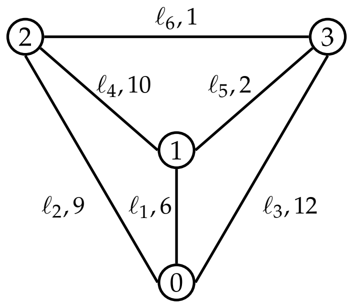
S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
kosten zonder samenw.	4	5	8	9	12	13	17
kosten met samenw.	4	5	8	7	7	9	10
$v(S)$	0	0	0	2	5	4	7

Tabel 1.1: De kosten van de goedkoopste netwerken en het bijbehorende kostenbesparingsspel.

◀

Opgave 1.5

Bekijk een netwerk met drie spelers 1, 2 en 3 die allen verbonden moeten worden met het punt 0 en waarvan de kosten zijn weergegeven in figuur 1.2. Geef het kostenbesparingsspel dat deze situatie weergeeft.



Figuur 1.2: Netwerkverbindingen van opgave 1.5.

Opgave 1.6

Bekijk een situatie met drie spelers, waarin iedere speler een machine heeft. Daarnaast heeft iedere speler een opdracht die door ieder van de machines uitgevoerd kan worden. De kosten die hieraan verbonden zijn, zijn terug te vinden in onderstaande kruistabel, waarbij de machines verticaal zijn weergegeven en de opdrachten horizontaal.

	o_1	o_2	o_3
m_1	6	4	3
m_2	3	5	2
m_3	2	6	6

Het kost bijvoorbeeld 4 om de opdracht van speler 2 uit te voeren op de machine van speler 1. Een coalitie kan gebruik alleen gebruikmaken van machines van spelers die in deze coalitie zitten. Elke machine kan maximaal één opdracht verwerken. Geef een coöperatief spel dat de winst door samenwerken van iedere coalitie weergeeft. Je mag er vanuit gaan dat iedere coalitie er voor wil zorgen dat alle opdrachten van de spelers in deze coalitie uitgevoerd worden met minimale kosten.

1.3 De core van een spel

In een aantal voorbeelden die we tot nu toe hebben behandeld, hebben we kunnen zien dat samenwerking kan leiden tot extra winst. Een belangrijke vraag die we willen beantwoorden is: hoe kunnen we deze winst op een eerlijke manier onder de spelers verdelen? En wat is op een eerlijke manier verdelen? Voordat we hier een antwoord op geven, zullen we eerst nog eens terugkijken naar het voorbeeld **marktplaats**.

Voorbeeld 1.9: marktplaats: een verdeelprobleem

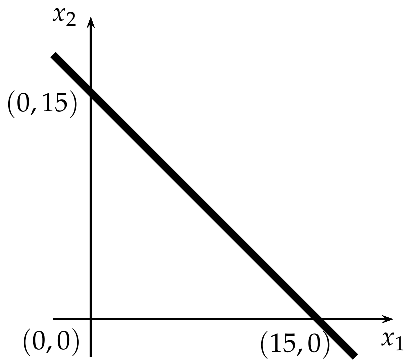
Speler 1 (Bas) en speler 2 (Chris) kunnen samen 15 euro verdienen door het mobieltje van Bas samen met de oplader van Chris op marktplaats te verkopen. Als ze dit gedaan hebben, moeten ze de winst van 15 euro samen verdelen. Er zijn heel veel mogelijkheden om deze winst te verdelen. Waarschijnlijk is één van de eerste verdelingen die bij je opkomt de verdeling die allebei de spelers de helft van de winst geeft. Dus zowel Bas als Chris krijgt 7.50 euro. Ook een verdeling met Bas 5 en Chris 10 euro is mogelijk, of andersom Bas 10 euro en Chris 5 euro en zo kun je nog veel meer verdelingen bedenken.

In deze paragraaf zullen we onderzoeken hoe we de extra winst onder de spelers kunnen verdelen, waarbij we gebruik willen maken van het spel dat we geconstrueerd hebben. Ons doel is daarbij (nog) niet om één verdeling van de winst aan te wijzen, maar om een aantal mogelijke verdelingen te vinden die "eerlijk" zijn. Waarbij we natuurlijk nog moeten definiëren wat "eerlijk" is. Als we de winst willen verdelen, dan betekent dit niets anders dan dat we $v(N)$ gaan verdelen onder alle spelers in N. Immers de waarde $v(N)$ geeft precies aan wat de spelers in N kunnen verdienen als ze samenwerken.

Een verdeling van $v(N)$ kan worden weergegeven met een rijtje van n getallen: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, zodanig dat $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$. De vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noemen we ook wel een (verdelings)vector. Hierbij is x_1 de uitbetaling aan speler 1 in deze verdeling, x_2 de uitbetaling aan speler 2 in deze verdeling, etc.

Voorbeeld 1.10: marktplaats: verdelingsvectoren

De verdeling die Bas en Chris allebei 7.50 euro geeft, kan in vectornotatie weergegeven worden met (7.5,7.5). De vector $(5,5)$ is geen verdelingsvector van $v(N)$, omdat hier in totaal 10 uitgedeeld wordt, wat minder is dan $v(N)$. In de verdelingsvector $(-1,16)$ krijgt Chris naast de winst van 15 euro ook nog een euro extra van Bas. Alle mogelijke verdelingen van $v(N)$ kunnen we grafisch weergeven in het vlak, zie figuur 1.3. Dit zijn alle punten (x_1, x_2) waarvoor geldt $x_1 + x_2 = 15$, dit is dus de lijn door de punten $(15,0)$ en $(0,15)$.



Figuur 1.3: Mogelijke verdelingsvectoren bij het voorbeeld **marktplaats**.

Wanneer zullen spelers met een bepaalde verdeling akkoord gaan? Kijk bijvoorbeeld naar de verdeling $(-1,16)$ in het voorbeeld **marktplaats**. Bij deze verdeling krijgt Chris alle winst en daarnaast ook nog één euro van Bas. Bas zal niet akkoord gaan met deze verdeling, omdat hij een winst van 0 euro heeft als hij niet samenwerkt en dan beter af is. Wil een verdeling kans van slagen hebben, dan moet iedere speler tenminste evenveel krijgen als hij kan verdienen als hij niet samenwerkt. Immers, als dit niet het geval is, dan kan een speler beter niet samenwerken met de andere spelers om zo meer geld te verdienen dan hij in de verdelingsvector krijgt toebedeeld. De imputatieverzameling van een spel (N, v) bevat alle verdelingen van $v(N)$ waarbij iedere speler tenminste evenveel krijgt als deze zou krijgen als er niet samengewerkt wordt.

De imputatieverzameling van een coöperatief spel

De imputatieverzameling van een coöperatief spel (N, v) bestaat uit alle verdelingen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die aan de volgende condities voldoen:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = v(N)$,

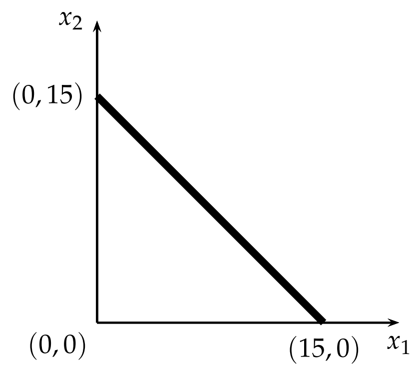
(b) $x_i \geq v(\{i\})$ voor elke $i \in N$.

De imputatieverzameling wordt genoteerd met $I(v)$.

Voor een verdeling $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ geldt dat x_i aangeeft wat speler i krijgt in deze verdeling. Als de verdeling $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in de imputatieverzameling zit, dan moet volgens conditie (a) gelden dat deze verdeling in totaal $v(N)$ verdeelt. Volgens conditie (b) geldt dat elke speler tenminste evenveel krijgt als de waarde van zijn éénpersoonscoalitie.

Voorbeeld 1.11: marktplaats: imputatieverzameling

Een verdeling in de imputatieverzameling moet de totale winst van $v(N) = 15$ verdelen. Daarnaast moeten alle spelers in N (dus de spelers 1 en 2) minstens evenveel krijgen als ze zelf zonder samenwerking kunnen verdienen. Omdat Bas en Chris zonder samenwerken niets kunnen verdienen geldt $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$. Voor een verdeling (x_1, x_2) in de imputatieverzameling moet dus gelden dat: $x_1 + x_2 = v(N)$ en daarnaast $x_1 \geq v(\{1\}) = 0$ en $x_2 \geq v(\{2\}) = 0$. Zo liggen bijvoorbeeld de verdelingen $(0, 15)$, $(1, 14)$, $(13, 2)$ en $(5.83, 9.17)$ allemaal in de imputatieverzameling, maar er zijn er nog veel meer. We kunnen dit ook grafisch weergeven. De imputatieverzameling bestaat uit de punten op de lijn $x_1 + x_2 = 15$ waarvoor geldt dat $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$. In figuur 1.4 geeft de vetgedrukte lijn de imputatieverzameling weer van het spel dat hoort bij het voorbeeld **marktplaats**.



Figuur 1.4: Imputatieverzameling van het spel bij het voorbeeld **marktplaats**.

Voor een spel met twee spelers kunnen we de imputatieverzameling grafisch weergeven in het vlak. Immers deze verzameling bestaat uit alle punten op de lijn $x_1 + x_2 = v(N)$ waarvoor geldt dat $x_1 \geq v(\{1\})$ en $x_2 \geq v(\{2\})$. Dit is ook te zien in figuur 1.4 voor het voorbeeld **marktplaats**.

Voorbeeld 1.12: handschoenenspel: tekenen imputatieverzameling

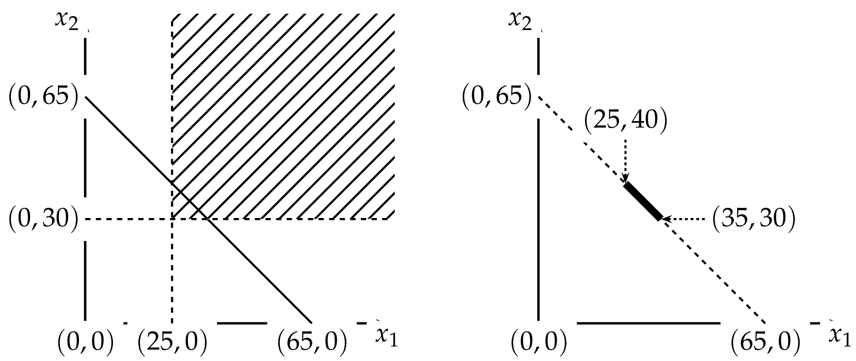
Herinner je het handschoenenspel dat gegeven werd door de onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	25	30	65

We willen in het (x_1, x_2)-vlak alle verdelingen tekenen die in de imputatieverzameling van dit spel liggen. Een verdeling in de imputatieverzameling voldoet aan de volgende (on)gelijkheden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= v(\{1,2\}) = 65, \\ x_1 &\geq v(\{1\}) \;\;= 25, \\ x_2 &\geq v(\{2\}) \;\;= 30. \end{aligned}$$

Een gedeelte van de lijn $x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) = 65$ (waarbij x_1 en x_2 allebei positief zijn), is getekend in de eerste figuur van figuur 1.5. Daarnaast zijn in dezelfde figuur stippellijnen getekend die horen bij de lijnen $x_1 = 25$ en $x_2 = 30$. Voor alle punten op of aan de rechterkant van de lijn $x_1 = 25$ geldt $x_1 \geq 25$. Voor alle punten op of boven de lijn $x_2 = 30$ geldt $x_2 \geq 30$. Dus het gearceerde gebied geeft precies alle punten weer waarvoor geldt $x_1 \geq 25$ en $x_2 \geq 30$. De imputatieverzameling is dan gelijk aan alle punten op de lijn $x_1 + x_2 = 65$ die in dit gebied liggen. Dit betekent dat deze verzameling alle punten bevat op het lijnstuk tussen de punten $(25, 40)$ en $(35, 30)$. Dit lijnstuk is getekend in de tweede figuur van 1.5. Merk op dat de hoekpunten van dit lijnstuk gevonden kunnen worden door de snijpunten van de lijnen $x_1 = 25$ en $x_1 + x_2 = 65$ en de lijnen $x_2 = 30$ en $x_1 + x_2 = 65$ uit te rekenen.



Figuur 1.5: Grafische weergave imputatieverzameling bij het voorbeeld **handschoenenspel**.

Opgave 1.7

Stel dat Bas zijn mobiele telefoon voor 5 euro op marktplaats kan verkopen. Chris heeft alleen een oplader en die levert 2.50 euro op als hij deze verkoopt. Een combinatie van een mobiele telefoon met oplader levert 15 euro op.

a) Geef bovenstaande situatie weer met behulp van een coöperatief spel.

b) Teken de imputatieverzameling van dit spel in het (x_1, x_2)-vlak.

Opgave 1.8

Bekijk twee bedrijven die beide linker- en rechterhandschoenen produceren. Een paar handschoenen is 5 euro waard, maar een enkele linker- of rechterhandschoen is niets waard. Bedrijf 1 produceert acht linker- en nul rechterhandschoenen bedrijf 2 produceert drie linker- en zeven rechterhandschoenen.

a) Geef bovenstaande situatie weer met behulp van een coöperatief spel.
b) Teken de imputatieverzameling van dit spel in het (x_1, x_2)-vlak.

Opgave 1.9

Laat a een reël getal zijn. Bekijk het coöperatieve spel (N, v) dat gegeven wordt door

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	5	7	a

Bepaal voor welke waarde(n) van a
a) de imputatieverzameling leeg is,
b) de imputatieverzameling uit één punt bestaat,
c) de imputatieverzameling uit oneindig veel punten bestaat.

Het kan voorkomen dat de imputatieverzameling van een spel (N, v) leeg is. De volgende stelling geeft aan dat de imputatieverzameling tenminste één verdeling bevat dan en slechts dan als de waarde van de grote coalitie tenminste evenveel is als de som van de waarden van de éénpersoonscoalities.

Stelling

Laat (N, v) een coöperatief spel zijn. Dan geldt

$$I(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

We zullen een wiskundig bewijs geven voor deze stelling.

Bewijs: merk op dat de stelling in feite uit twee beweringen bestaat. De eerste bewering is dat als de imputatieverzameling van een spel (N, v) niet leeg is, dan geldt dat $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$. De tweede bewering is dat als voor een spel (N, v) geldt dat $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$ dan geldt $I(v) \neq \emptyset$.

We beginnen met de eerste bewering. Laat (N, v) een spel zijn zodanig dat $I(v) \neq \emptyset$. Er bestaat dus een verdeling $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ waarvoor geldt dat

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v(N)$$

en voor elke speler $i \in N$ geldt dat

$$x_i \geq v(\{i\}).$$

Combineren we deze gelijkheid en ongelijkheden dan volgt dat

$$\begin{aligned} v(N) &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &\geq v(\{1\}) + v(\{2\}) + \ldots + v(\{n\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}), \end{aligned}$$

wat de eerste bewering bewijst.

We gaan nu de tweede bewering bewijzen. Laat (N, v) een spel zijn zodanig dat $v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$. We bewijzen dat de verdeling

$$x = \Big(v(\{1\}), v(\{2\}), \ldots, v(\{n-1\}), v(N) - v(\{1\} - v(\{2\}) - \ldots - v(\{n-1\})\Big)$$

in de imputatieverzameling ligt. Merk op dat

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v(N),$$

en

$$x_i \geq v(\{i\})$$

voor alle $i = 1, \ldots, n-1$. We moeten nog bewijzen dat $x_n \geq v(\{n\})$. Uit de aanname

$$v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = v(\{1\}) + v(\{2\}) + \ldots + v(\{n\})$$

volgt door herschrijven dat

$$v(N) - v(\{1\}) - v(\{2\}) - \ldots - v(\{n-1\}) \geq v(\{n\}).$$

Dit toont precies aan dat $x_n \geq v(\{n\})$. □

Opgave 1.10

Geef bij ieder van onderstaande spelen aan of de imputatieverzameling leeg is of niet, indien de imputatieverzameling niet leeg is, geef dan een voorbeeld van een verdeling die in de imputatieverzameling ligt.

a) Het spel (N, v) met $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\{1\}) = 2$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{3\}) = 4$ en $v(N) = 10$.
b) Het spel (N, v) met $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\{1\}) = 2$, $v(\{2\}) = 3$, $v(\{3\}) = 6$ en $v(N) = 10$.

Voor een tweepersoonsspel kunnen we stellen dat verdelingen in de imputatieverzameling stabiel zijn in de zin dat geen enkele speler meer kan verdienen door niet samen te werken. Kunnen we dit idee achter stabiele verdelingen nu uitbreiden naar spelen met meer dan twee spelers? Wanneer gaan spelers akkoord met een bepaalde verdeling en in wat voor gevallen gaan ze in ieder geval niet akkoord? Een stabiele verdeling moet in ieder geval in de imputatieverzameling liggen, immers, als dit niet het geval is, dan kan een speler beter niet samenwerken met de andere spelers en zo meer verdienen dan hij in de verdelingsvector krijgt. Maar zullen spelers akkoord gaan met een willekeurige verdeling in de imputatieverzameling? Het volgende voorbeeld laat zien dat er ook nog andere aspecten een rol spelen bij het bepalen of een verdeling stabiel is.

Voorbeeld 1.13: elektriciteitsnet: stabiele verdeling

Herinner je dat het kostenbesparingsspel horend bij deze situatie gegeven werd door

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	2	5	4	7

Laten we nu eens kijken naar de verdeling $(5,2,0)$, deze ligt in de imputatieverzameling (ga dit zelf na). Toch zullen de spelers 2 en 3 niet gelukkig zijn met deze verdeling. Immers samen kunnen zij 4 besparen, terwijl zij in deze verdeling samen $2+0=2$ terugzien van de totale besparing van 7. Dus als zij besluiten om niet mee te doen met de grote coalitie, maar samen te werken zonder speler 1, dan besparen/verdienen ze 4. Deze 4 kunnen ze zodanig verdelen dat beide spelers meer krijgen dan in de verdeling $(5,2,0)$, neem bijvoorbeeld de verdeling $(3,1)$ dan krijgen beide spelers één meer dan in de oorspronkelijke verdeling en zijn zo dus beter af. ◀

Het vorige voorbeeld toont aan dat, om stabiele verdelingen te krijgen, we extra eisen moeten stellen aan de verdelingen in de imputatieverzameling. We moeten niet alleen kijken naar spelers alleen, maar ook naar coalities van spelers. Als de opgetelde uitbetalingen aan de spelers van een coalitie minder zijn dan de uitbetaling van deze coalitie in het spel, dan kan de coalitie meer geld verdienen door zich af te splitsen en er zo voor te zorgen dat iedere speler in deze coalitie zich wat betreft uitbetaling kan verbeteren. Daarom zal zo'n coalitie dan niet akkoord gaan met die verdeling. Alle verdelingen bij een spel (N,v) die $v(N)$ verdelen en waarvoor geen enkele coalitie een reden heeft om zich af te splitsen noemen we ook wel de core van het spel.

In meer wiskundige taal kunnen we de core als volgt definiëren:

De core van een coöperatief spel

De core van een coöperatief spel (N,v) bestaat uit alle verdelingen $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ die aan de volgende condities voldoen:

(a) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$,

(b) $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ voor elke coalitie S.

Als $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ in de core ligt, dan noemen we $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ook wel een core-element.

Voor een verdeling $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ geldt dat x_i aangeeft wat speler i krijgt in deze verdeling. Als de verdeling $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ in de core zit, dan moet volgens conditie (a) gelden dat deze verdeling in totaal $v(N)$ verdeelt. Verder geldt volgens (b) dat de som van de uitbetalingen aan de spelers in een willekeurige coalitie minstens evenveel moet zijn als de waarde van deze coalitie. Dit betekent dat geen enkele coalitie zichzelf qua uitbetaling kan verbeteren door de grote coalitie te verlaten. Immers als een coalitie S de grote coalitie verlaat, dan krijgt deze coalitie in totaal $v(S)$, maar de som van uitbetalingen aan spelers in S is minstens even groot volgens conditie (b) toegepast op coalitie S, dus heeft coalitie S geen reden om zich af te splitsen. In feite bestaat conditie (b) uit een aantal ongelijkheden, voor elke coalitie van N één. Conditie (b) bevat ook de ongelijkheden zoals die gesteld zijn in de imputatieverzameling, dit zijn namelijk de ongelijkheden die ontstaan als je kijkt naar de éénpersoonscoalities. In het volgende voorbeeld wordt geïllustreerd hoe je kunt nagaan of een verdeling in de core ligt.

Voorbeeld 1.14: elektriciteitsnet: checken core-elementen

Liggen de verdelingen $(1,2,4)$, $(1,1,4)$, $(1,4,2)$, $(3,2,2)$ en $(2,2,4)$ in de core van het kostenbesparingsspel dat hoort bij het voorbeeld **elektriciteitsnet**? Merk op dat als de verdeling (x_1, x_2, x_3) in de core zit, dan moet volgens conditie (a) gelden dat:

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 7 \tag{1.1}$$

en volgens conditie (b) moet aan de volgende ongelijkheden zijn voldaan:

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 2 \tag{1.2}$$
$$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 5 \tag{1.3}$$
$$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 4 \tag{1.4}$$

$$x_1 \geq v(\{1\}) = 0 \tag{1.5}$$
$$x_2 \geq v(\{2\}) = 0 \tag{1.6}$$
$$x_3 \geq v(\{3\}) = 0 \tag{1.7}$$

De eerste en de vierde verdeling voldoen aan alle ongelijkheden (ga na) en verdelen $v(N)$, deze zitten dus in de core. Voor de tweede en de vijfde verdeling geldt $x_1 + x_2 + x_3 \neq 7$, dus dit zijn geen core-elementen. Voor de derde verdeling geldt $x_1 + x_3 = 3 < 5$ en daarom zit ook deze verdeling niet in de core.

Opgave 1.11

Hoeveel ongelijkheden worden er beschreven bij conditie (b) van de core van een n-persoonsspel?

Als een verdeling gegeven is dan kun je door alle condities na te lopen controleren of deze in de core ligt. Het is echter ook mogelijk (met enig proberen) om zelf core-elementen van een spel te construeren. Dit wordt in het volgende voorbeeld uitgewerkt.

Voorbeeld 1.15: elektriciteitsnet: construeren core-elementen

Bekijk het kostenbesparingsspel van het voorbeeld **elektriciteitsnet**. Een verdeling is een core-element als deze voldoet aan vergelijking (1.1) en aan de ongelijkheden (1.2) tot en met (1.7). Met behulp van deze (on)gelijkheden kunnen we zelf ook nog andere core-elementen vinden. Hiervoor is het handig om de ongelijkheid (1.2) tot en met (1.4) te herschrijven met behulp van vergelijking (1.1). Immers als $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, dan volgt hieruit dat $x_3 = 7 - (x_1 + x_2)$. Daarnaast moet ook gelden dat $x_1 + x_2 \geq 2$. Als we deze twee condities samennemen, dan vinden we dat:

$$x_3 = 7 - (x_1 + x_2) \leq 7 - 2 = 5.$$

Evenzo vinden we dat voor een core-element moet gelden dat $x_2 \leq 2$ en $x_1 \leq 3$ (ga na). Door nu een beetje te puzzelen met verdelingen kunnen we zelf ook core-elementen maken. We zien bijvoorbeeld dat ook de verdelingen $(0,2,5)$ en $(3,1,3)$ in de core liggen.

Opgave 1.12

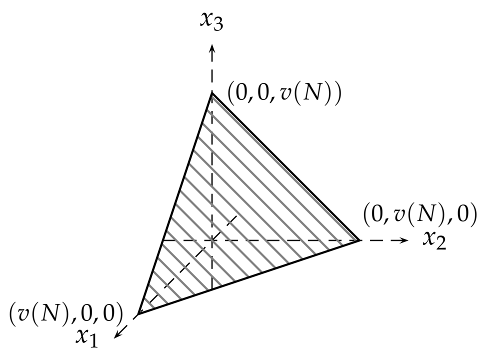
Bekijk het spel uit opgave 1.3.

a) Welke van de volgende verdelingen : $(30, 50, 25)$, $(25, 45, 35)$, $(15, 50, 40)$ en $(20, 45, 35)$, liggen in de core? Verklaar je antwoord.

b) Geef tenminste drie verschillende verdelingen die in de core liggen.

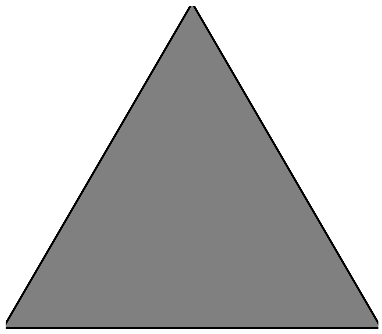
Merk op dat de definitie van een core-element bij een spel van twee spelers overeenkomt met de definitie van een element uit de imputatieverzameling bij een spel met twee spelers. Immers uit conditie (a) volgt dat als een verdeling (x_1, x_2) in de core ligt, dan moet gelden dat $x_1 + x_2 = v((\{1, 2\})$. En uit conditie (b) volgt dat $x_1 \geq v(\{1\})$ en $x_2 \geq v(\{2\})$ (neem voor S achtereenvolgens de coalities $\{1\}$ en $\{2\}$). Voor een tweepersoonsspel hebben we gezien dat we de imputatieverzameling, dus ook de core, grafisch kunnen weergeven in het (x_1, x_2)-vlak. Immers dit is het lijnstuk waarvoor geldt $x_1 + x_2 = v(N)$ en $x_1 \geq v(\{1\})$ en $x_2 \geq v(\{2\})$. Ook voor driepersoonsspelen is het nog mogelijk om de imputatieverzameling en de core grafisch weer te geven. We zullen bekijken hoe dat in zijn werk gaat.

Allereerst moet een verdeling (x_1, x_2, x_3) die in de core van het spel (N, v) ligt, $v(N)$ verdelen. Dus er moet gelden $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$, wanneer je dit tekent in de driedimensionale ruimte, dan krijg je een vlak. In de spelen die wij bestuderen zal daarnaast vaak ook gelden dat x_1, x_2 en x_3 niet negatief mogen zijn (vanwege de waarden van $v(\{1\})$, $v(\{2\})$ en $v(\{3\})$). In figuur 1.6 is het gedeelte van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$ gearceerd waarvoor elke coördinaat niet negatief is. Merk op dat de core een deelverzameling moet zijn van deze driehoek. Merk ook op dat als $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ dan is dit precies de imputatieverzameling.



Figuur 1.6: Het gedeelte van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$ waarvoor geldt dat $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ en $x_3 \geq 0$.

Het is niet makkelijk om in de driedimensionale ruimte de core te tekenen. Het wordt gemakkelijker als we de gearceerde driehoek van figuur 1.6 er uitlichten. We knippen dan als het ware deze driehoek uit en leggen hem plat op het papier neer (zie figuur 1.7). Vervolgens gaan we in deze driehoek de core tekenen. Hoe dit in zijn werk gaat, wordt geïllustreerd in het volgende voorbeeld.



Figuur 1.7: Het gedeelte van het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$ waarin we de core gaan tekenen.

Voorbeeld 1.16: elektriciteitsnet: tekenen van de core

We willen de core tekenen van het volgende kostenbesparingsspel:

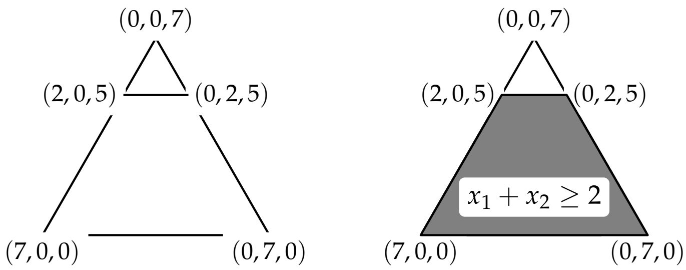
S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
v(S)	0	0	0	2	5	4	7

Merk op dat alle punten in de driehoek met als hoekpunten $(7,0,0)$, $(0,7,0)$ en $(0,0,7)$ voldoen aan $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ en $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, oftewel, dit is precies de imputatieverzameling. Voor een core-element (x_1, x_2, x_3) moet daarnaast ook nog gelden dat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq v(\{1,2\}) = 2 \\ x_1 + x_3 &\geq v(\{1,3\}) = 5 \\ x_2 + x_3 &\geq v(\{2,3\}) = 4 \end{aligned}$$

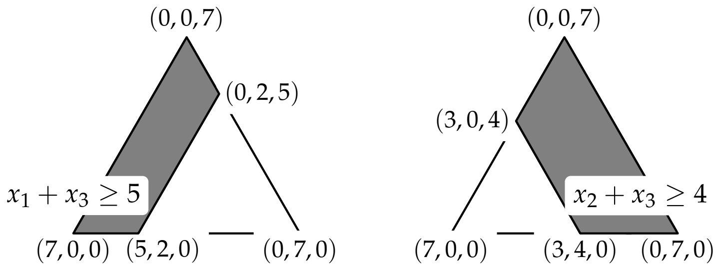
We zullen voor elke van deze drie ongelijkheden in een plaatje aangeven welke punten in de driehoek aan deze ongelijkheid voldoen. Uiteindelijk bestaat de core uit die punten die aan alledrie de ongelijkheden voldoen.

We beginnen met de ongelijkheid $x_1 + x_2 \geq 2$. Het is verstandig om eerst in de driehoek de lijn te tekenen waarvoor geldt $x_1 + x_2 = 2$. Merk op dat als $x_1 + x_2 = 2$ dan volgt uit $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ dat $x_3 = 5$. De lijn $x_1 + x_2 = 2$ in het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ loopt van het punt $(2,0,5)$ tot aan het punt $(0,2,5)$. Deze lijn is weergegeven in de eerste figuur van figuur 1.8. Merk op dat deze lijn dus parallel loopt met de onderste lijn, immers bij beide lijnen is x_3 constant. De lijn tussen $(2,0,5)$ en $(0,2,5)$ verdeelt de figuur in twee stukken. Eén gedeelte waar $x_1 + x_2 \geq 2$ (en dus $x_3 \leq 5$) en een gedeelte waar $x_1 + x_2 \leq 2$ (en dus $x_3 \geq 5$). Voor alle punten onder of op de lijn $x_1 + x_2 = 2$ geldt dat $x_1 + x_2 \geq 2$, dit kun je nagaan door een willekeurig punt in dit gebied in te vullen (bijv. $(7,0,0)$) en na te gaan dat inderdaad geldt $x_1 + x_2 \geq 2$. In de tweede figuur is het gebied gearceerd waarvoor geldt $x_1 + x_2 \geq 2$.



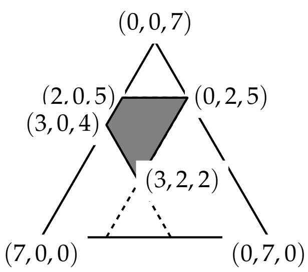
Figuur 1.8: Het tekenen van de punten die voldoen aan de ongelijkheid $x_1 + x_2 \geq 2$ in het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

Op eenzelfde manier kunnen we de punten tekenen die voldoen aan de ongelijkheid $x_1 + x_3 \geq 5$. We tekenen weer eerst de lijn $x_1 + x_3 = 5$, deze loopt van het punt $(5, 2, 0)$ naar $(0, 2, 5)$ (deze lijn loopt parallel aan de lijn $x_1 + x_3 = 7$ oftewel de lijn $x_2 = 0$. Het gebied links van deze lijn bevat alle punten waarvoor geldt $x_1 + x_3 \geq 5$. Dit is te zien in de eerste figuur van 1.9. In de tweede figuur van figuur 1.9 is het gebied gearceerd waarvoor geldt $x_2 + x_3 \geq 4$, ook hier is weer eerst de lijn $x_2 + x_3 = 4$ getekend en daarna is bekeken voor welk gebied $x_2 + x_3 \geq 4$ geldt.



Figuur 1.9: De punten die voldoen aan de ongelijkheid $x_1 + x_3 \geq 5$ (linkerfiguur) en de ongelijkheid $x_2 + x_3 \geq 4$ (rechterfiguur) in het vlak $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

De core bestaat uit alle punten die aan alledrie de ongelijkheden voldoen. Dus als we de drie plaatjes combineren en bekijken welk gebied in alle drie de plaatjes gearceerd is, dan vinden we de core. Deze is getekend in figuur 1.10. Het onderste hoekpunt is te vinden door te bedenken dat de lijnen $x_1 = 3$ en $x_2 = 2$ elkaar daar snijden.



Figuur 1.10: De core van het kostenbesparingsspel.

◀

In de volgende box is samengevat hoe je de core van een driepersoonspel kunt tekenen.

Tekenen core driepersoonspel

Laat (N, v) een driepersoonsspel zijn. Dan kunnen we de core van dit spel als volgt tekenen.

1. Teken de driehoek met als hoekpunten $(v(N), 0, 0)$, $(0, v(N), 0)$ en $(0, 0, v(N))$.
2. Teken de imputatieverzameling in deze core, dat wil zeggen, kijk voor welke punten (x_1, x_2, x_3) er geldt dat $x_1 \geq v(\{1\})$, $x_2 \geq v(\{2\})$ en $x_3 \geq v(\{3\})$.
3. Teken de lijn $x_1 + x_2 = v(\{1,2\})$ en geef het gebied aan waar de ongelijkheid $x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\})$ geldt.
4. Teken de lijn $x_1 + x_3 = v(\{1,3\})$ en geef het gebied aan waar de ongelijkheid $x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\})$ geldt.
5. Teken de lijn $x_2 + x_3 = v(\{2,3\})$ en geef het gebied aan waar de ongelijkheid $x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\})$ geldt.

De core bestaat nu uit de gemeenschappelijke verdelingen van de gebieden in punt twee tot en met vijf.

Opgave 1.13

a) Bekijk het spel (N, v_1):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_1(S)$	0	0	0	3	4	5	6

Teken de core van dit spel.

b) Bekijk het spel (N, v_2):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_2(S)$	0	0	0	4	1	2	4

Teken de core van dit spel.

c) Bekijk het spel (N, v_3):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_3(S)$	0	0	0	1	1	2	5

Teken de core van dit spel.

d) Bekijk het spel (N, v_4):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v_4(S)$	0	0	1	3	2	1	6

Teken de core van dit spel.

De hoekpunten van de core noemen we ook wel de extreme punten van de core. In het volgende voorbeeld zullen we deze hoekpunten nader bekijken.

Voorbeeld 1.17: elektriciteitsnet: extreme punten van de core

In figuur 1.10 is te zien dat de extreme punten van de core van het spel dat gegeven wordt door

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	2	5	4	7

gelijk zijn aan $(3, 0, 4)$, $(2, 0, 5)$, $(0, 2, 5)$ en $(3, 2, 2)$. Omdat deze punten core-elementen zijn, weten we dat ze voldoen aan de ongelijkheden die volgen uit conditie (b) van de core. Dit zijn de ongelijkheden:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0, \\ x_1 + x_2 &\geq 2, \\ x_1 + x_3 &\geq 5, \\ x_2 + x_3 &\geq 4. \end{aligned}$$

Wanneer we nu de extreme punten bekijken, dan zien we dat bij ieder van deze punten dat twee van de zes ongelijkheden gelden met een gelijkteken. We noemen dit ook wel dat de bijbehorende voorwaarde bindend is. Bijvoorbeeld voor het punt $(3,0,4)$ geldt $x_2 = 0$ en $x_2 + x_3 = 4$, alle andere ongelijkheden zijn niet bindend. Voor het extreme punt $(3,2,2)$ zijn de vijfde en zesde ongelijkheid bindend. ◀

In het algemeen geldt voor alle extreme punten van de core in een driepersoonspel dat tenminste twee ongelijkheden bindend zijn. Andersom geldt ook dat als je een core-element hebt waarvoor tenminste twee ongelijkheden van conditie (b) bindend zijn, dan moet dit punt een extreem punt zijn van de core.

Opgave 1.14

Geef bij ieder van de spelen van opgave 1.13 de extreme punten en geef aan welke ongelijkheden van conditie (b) bindend zijn.

Opgave 1.15

Gegeven is het volgende spel

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
v(S)	0	2	0	4	3	6	10

a) Geef een core-element.
b) Ga van ieder van de volgende verdelingen na of het een extreem punt is van de core: $(2,3,5)$, $(2,2,6)$, $(0,7,3)$ en $(4,0,6)$.

Wanneer een spel meer dan drie spelers heeft, dan is het niet meer mogelijk om de core grafisch weer te geven. We kunnen wel proberen om met behulp van de (on)gelijkheden die moeten gelden volgens de definitie een verdeling te vinden die in de core ligt. Hier bestaat niet een methode voor die we kunnen gebruiken, in de praktijk komt het neer op proberen en puzzelen en de verdeling die je hebt eventueel een beetje aanpassen zodanig dat deze in de core komt te liggen.

Opgave 1.16

Bekijk vier bedrijven die linker- en rechterhandschoenen produceren volgens het volgende schema :

bedrijf	rechts	links
1	4	7
2	9	12
3	8	4
4	5	3

De opbrengst van een paar handschoenen is 1 euro.

a) Bepaal het bijbehorende coöperatieve spel.

We gaan een verdeling (x_1, x_2, x_3, x_4) construeren die in de core ligt.

b) Wat moet er gelden voor $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ als (x_1, x_2, x_3, x_4) in de core ligt?

c) Schrijf de ongelijkheden uit die moeten gelden als je kijkt naar de éénpersoonscoalities.

d) Schrijf de ongelijkheden uit die moeten gelden als je kijkt naar de driepersoonscoalities. Combineer deze met de gelijkheid van onderdeel b), bijvoorbeeld: uit $x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$ en $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$ volgt $x_4 \leq 5$.

e) Geef een verdeling die in de core ligt.

Helaas zijn er ook spelen waarvoor de core leeg is. Dat wil zeggen dat er geen verdelingen te vinden zijn die aan de condities (a) en (b) voldoen. Hieronder vind je een voorbeeld van een spel met een lege core:

Voorbeeld 1.18: Lege core

Bekijk het volgende spel (N, v):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	6	7	8	10

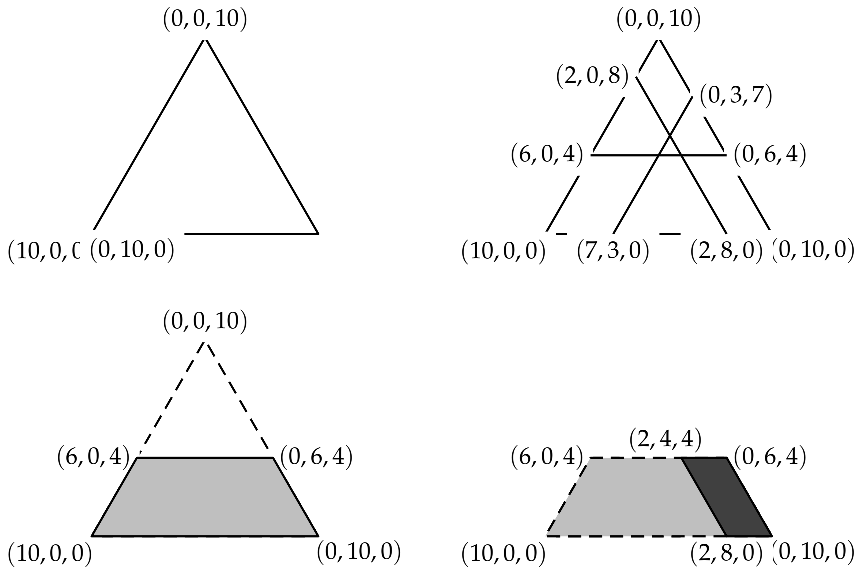
We laten zien dat dit spel een lege core heeft, we doen dit zowel grafisch als analytisch. Allereerst schrijven we uit aan welke (on)gelijkheden een verdeling (x_1, x_2, x_3) die in de core van dit spel ligt moet voldoen:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= v(\{1,2,3\}) = 10 \\
x_1 + x_2 &\geq v(\{1,2\}) = 6 \\
x_1 + x_3 &\geq v(\{1,3\}) = 7 \\
x_2 + x_3 &\geq v(\{2,3\}) = 8 \\
x_1 &\geq v(\{1\}) = 0 \\
x_2 &\geq v(\{2\}) = 0 \\
x_3 &\geq v(\{3\}) = 0
\end{aligned}
$$

We gaan nu eerst in een plaatje kijken welke punten er mogelijk in de core kunnen liggen. Mogelijke core-elementen liggen in de driehoek $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ met $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ en $x_3 \geq 0$, omdat elke speler zonder samenwerking 0 kan verdienen. Dit zijn dus alle verdelingen die in de driehoek met als hoekpunten $(10, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ en $(0, 0, 10)$ liggen, zie het plaatje linksboven in figuur 1.11.

Voordat we naar de overige ongelijkheden gaan kijken, tekenen we eerst de lijnstukken $x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) = 6$, $x_1 + x_3 = v(\{1,3\}) = 7$ en $x_2 + x_3 = v(\{2,3\}) = 8$ in deze driehoek. Het lijnstuk $x_1 + x_2 = v(\{1,2\}) = 6$ in de driehoek waar $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ kan ook omschreven worden als $x_3 = 4$ en heeft als hoekpunten $(6,0,4)$ en $(0,6,4)$. Op eenzelfde manier kunnen de hoekpunten van de andere twee lijnstukken bepaald worden. In het plaatje rechtsboven van figuur 1.11 zijn deze drie lijnstukken getekend.

Bekijk nu het plaatje dat linksonder in figuur 1.11 is afgebeeld. Alle verdelingen buiten het lichtgrijze gebied (dat als hoekpunten $(6,0,4)$, $(0,6,4)$,
$(10,0,0)$ en $(0,10,0)$ heeft) kunnen niet in de core kunnen liggen, omdat buiten dit gearceerde gebied geldt dat $x_1 + x_2 < 6$. Verdelingen die in de core liggen, moeten dus in het lichtgrijze gebied liggen. In het volgende en laatste plaatje van figuur 1.11 bekijken we dit lichtgrijze gebied nog eens verder. Verdelingen buiten het donkergrijze gebied, (dat als hoekpunten $(2,4,4)$, $(0,6,4)$, $(0,10,0)$ en $(2,8,0)$ heeft) kunnen niet in de core liggen, omdat voor deze verdelingen geldt $x_2 + x_3 < 8$. Maar als we de verdelingen in het donkergrijze gebied bekijken dan zien we dat deze ook niet in de core kunnen liggen, omdat voor die verdelingen geldt dat $x_1 + x_3 < 7$. Geen enkele verdeling voldoet dus aan alle core condities en dus is de core in dit geval leeg.



Figuur 1.11: Een lege core.

We kunnen dit ook op een analytische manier laten zien door de ongelijkheden waaraan een verdeling in de core moet voldoen nader te bekijken en een tegenspraak af te leiden. Stel dat de core niet leeg is. Dan is er een verdeling (x_1, x_2, x_3) die in de core ligt. Voor deze verdeling geldt (volgens conditie (b) uitgeschreven voor alle tweepersoonscoalities) dat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_3 &\geq 7 \\ x_2 + x_3 &\geq 8. \end{aligned}$$

Wanneer we deze ongelijkheden bij elkaar optellen, zien we dat er geldt dat

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 21, \quad \text{ofwel} \quad 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 21. \tag{1.8}$$

Aan de andere kant weten we dat ook conditie (a) geldt en dus dat

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Vullen we dit in in (1.8), dan krijgen we $20 \geq 21$. Dit is een tegenspraak, dus (x_1, x_2, x_3) kan geen core-element zijn. Er zijn dus geen verdelingen die aan alle condities van de core voldoen, dus de core is leeg. ◀

Opgave 1.17
Bekijk het volgende spel (N, v):

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	3	0	0	3	3	6	8

Laat zien (zowel grafisch als analytisch) dat dit spel een lege core heeft.

Opgave 1.18
Laat zien dat als in een driepersoonsspel (N, v) geldt dat

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) > 2v(\{1,2,3\}),$$

dan heeft dit spel een lege core.

Verdelingen in de core zijn stabiel in de zin dat geen enkele coalitie meer geld kan verdienen door de grote coalitie te verlaten. Dit is natuurlijk een mooie eigenschap. Het kan zo zijn dat de core uit heel veel verdelingen bestaat, of dat er helemaal geen core-elementen zijn te vinden. In de praktijk is er behoefte aan één verdeling van de winst. De core geeft dus wel een aantal verdelingen waarvan we kunnen stellen dat ze in zekere zin “eerlijk” zijn, maar we weten nog steeds niet hoe we de winst zullen verdelen. Daarom zullen we in de volgende hoofdstukken ook naar specifieke verdelingen kijken die in de speltheorie gebruikt worden. Zo’n verdeling geeft bij elk spel aan hoe de winst verdeeld moet worden onder alle spelers. Deze verdelingen hoeven niet altijd in de core te liggen, maar we zullen zien dat deze dan weer andere mooie eigenschappen hebben.

1.4 Gemengde opgaven

Opgave 1.19
Hendri, Marcel en Marloes moeten een praktische opdracht (po) voor wiskunde maken. Deze opdracht mag zowel individueel als in groepjes van 2 of 3 leerlingen gemaakt worden. Marloes is goed in wiskunde, maar haar presentatie- en computervaardigheden zijn minder goed. Hendri en Marcel zijn echter minder goed in wiskunde maar beter in het werken met de computer en het uitvoeren van presentaties. Indien de leerlingen in een groepje samenwerken krijgen ze voor de praktische opdracht

een groepspunt. De leerlingen krijgen dan de vrijheid om dit groepspunt naar eigen goed dunken te verdelen over de groepsleden.

Als Hendri, Marcel en Marloes ieder apart de praktische opdracht maken, dan scoren ze respectievelijk 4, 3 en 7 punten. Als Hendri samenwerkt met Marcel dan scoren ze samen een groepspunt van 9, als Hendri met Marloes samenwerkt dan krijgen zij 13 punten, als Marcel en Marloes samenwerken dan kunnen zij samen 13 punten behalen. Als Hendri, Marcel en Marloes alledrie samenwerken dan behalen zij 19 punten.
a) Bepaal een coöperatief spel dat deze situatie weergeeft.
b) Teken de imputatieverzameling en de core van dit spel.
c) Hoe kun je de verdelingen in de core in deze context interpreteren?

Opgave 1.20

a) Bepaal drie verschillende core-elementen van het coöperatieve spel (N, v) met $N = \{1,2,3\}$ gegeven door:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	2	10	6	16	10	20	24

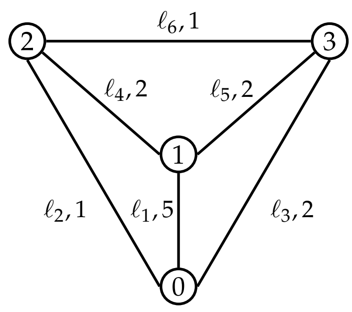
b) Bepaal drie verschillende core-elementen van het coöperatieve spel (N, v) met $N = \{1,2,3,4\}$ gegeven door

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$
$v(S)$	0	0	0	0	4	2	4	5	2

S	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$v(S)$	1	6	6	7	5	10

Opgave 1.21

De bedrijven 1, 2, en 3 willen alle verbonden worden via een netwerk met een elektriciteitscentrale. Dit netwerk moet echter nog ontwikkeld worden. Ieder bedrijf kan direct of via een ander bedrijf verbonden worden met het centrale elektriciteitsnet. De kosten van elke verbinding zijn weergegeven in figuur 1.12, waarbij het punt 0 de plaats van de elektriciteitscentrale weergeeft. Wanneer bedrijven samenwerken kunnen ze gebruik maken van alle verbindingen tussen deze bedrijven onderling en van de directe verbindingen van deze bedrijven naar de elektriciteitscentrale.



Figuur 1.12: Netwerkverbindingen bij opgave 1.21.

a) Maak een tabel met daarin voor iedere coalitie de kosten die ze hebben als ze niet samenwerken, de kosten van het goedkoopste netwerk als ze wel samenwerken en de waarde van het bijbehorende kostenbesparingsspel.
b) Teken de core van dit spel, wat zijn de hoekpunten?

Opgave 1.22

Teken/schets de core van het spel uit opgave 1.3. Let er op dat de waarde van de éénpersoonscoalities niet gelijk zijn aan nul, en dat dit extra lijnen in je plaatje oplevert.

Opgave 1.23

Laat q een reëel getal zijn en bekijk het coöperatieve spel (N, v) met:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	4	q	5	8

Bepaal voor welke waarde(n) van q
a) de core leeg is,
b) de core uit precies één punt bestaat,
c) de core uit oneindig veel punten bestaat.

Opgave 1.24

Maak een driepersoonsspel, waarvoor het volgende geldt: de core bestaat precies uit één verdeling en $v(N) = 3$.

Opgave 1.25

a) Bekijk het spel

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	c	c	c	9

waarbij c een reëel getal is. Bepaal voor welke c de core van dit spel niet leeg is.

b) Bekijk het spel

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	c	c	c	d

waarbij c een reëel getal is en d een reël getal groter of gelijk aan nul. Bepaal voor welke c de core van dit spel niet leeg is (merk op dat je antwoord zal afhangen van de constante d).

Opgave 1.26

Bekijk een spel (N, v) zodanig dat voor alle coalities S geldt dat $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Bewijs dat de imputatieverzameling van dit spel uit precies één verdeling bestaat en bepaal deze verdeling. Hoe ziet de core van dit spel eruit?

Opgave 1.27

Bekijk het spel (N, v) met $N = \{1, 2, 3\}$. Het is gegeven dat de vectoren $(1, 0, 1)$ en $(2, 0, 0)$ in de core van dit spel liggen.
a) Bepaal $v(\{1, 2, 3\})$.
b) Schrijf voor beide vectoren de ongelijkheden uit die volgen uit conditie (b) van de definitie van de core.
c) Ligt de verdeling $(1\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ in de core van het spel (N, v)?
d) Laat a een getal zijn zo dat $0 \leq a \leq 1$. Ligt de verdeling $a(1, 0, 1) + (1 - a)(2, 0, 0) = (2 - a, 0, a)$ in de core?

Opgave 1.28

Bekijk het coöperatieve spel met $N = \{1, 2, 3\}$ en waarden zoals weergegeven in onderstaande tabel:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	$t+5$	5	7	$2t$	$3t+4$	14	$2t+r$

Er is gegeven dat $(x_1, x_2, x_3) = (2t, 10, 9)$ in de core ligt van dit spel. Bepaal t en r.

Opgave 1.29

Bekijk het spel (N, v), met $N = \{1, 2, 3, 4\}$, waarvoor geldt dat:

$$\begin{aligned} v(\{1,2,3\}) &= 5, \\ v(\{1,2,4\}) &= 6, \\ v(\{1,3,4\}) &= 6, \\ v(\{2,3,4\}) &= 5, \\ v(\{1,2,3,4\}) &= 7. \end{aligned}$$

Heeft dit spel een lege core?

A
Voorkennis

A.1 Verzamelingen

In deze paragraaf wordt een overzicht gegeven van notaties met betrekking tot verzamelingen. Een verzameling bestaat uit een aantal elementen en kan weergegeven worden door de elementen op te sommen en deze tussen accolades te zetten. Zo kun je de spelersverzameling N weergeven met $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Het aantal elementen van een verzameling N wordt genoteerd met $|N|$. Als $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan geldt bijvoorbeeld dat $|N| = 5$. Het $\in$-teken geeft aan dat een element tot een verzameling behoort. Dus als $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan geldt $1 \in N$, $2 \in N$, $3 \in N$, $4 \in N$, en $5 \in N$, maar 6 is geen element van de verzameling N en dat noteren we met $6 \notin N$.

Een willekeurige groep elementen van een verzameling noemen we ook wel een deelverzameling. Dus als $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan is bijvoorbeeld $S = \{1, 3\}$ een deelverzameling van N. We noteren dit met $S \subset N$. De deelverzameling die geen elementen heeft wordt ook wel de lege verzameling genoemd en wordt genoteerd met $\emptyset$. De verzameling $N \backslash S$ (uitspraak N min S) bestaat uit alle spelers uit N die niet in S zitten. Dus in bovenstaand voorbeeld is $N \backslash S = \{2, 4, 5\}$.

Soms ben je geïnteresseerd in alle elementen van twee verzamelingen samen, dit noemen we in de wiskunde ook wel de vereniging van twee verzamelingen. De vereniging van twee verzamelingen S en T, notatie $S \cup T$, bestaat uit alle elementen die ofwel in S liggen, ofwel in T of in allebei. Dus als $S = \{1, 2\}$ en $T = \{5\}$, dan geldt $S \cup T = \{1, 2, 5\}$, maar ook als $S = \{1, 2\}$ en $T = \{2, 5\}$ geldt $S \cup T = \{1, 2, 5\}$.

De doorsnede van twee verzamelingen S en T, notatie $S \cap T$, bevat alle elementen die zowel in de verzameling S als in de verzameling T liggen. Dus als $S = \{1, 2\}$ en $T = \{5\}$, dan is $S \cap T = \emptyset$, en als $S = \{1, 2\}$ en $T = \{2, 5\}$, dan geldt $S \cap T = \{2\}$.

Opgave A.1

Laat $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $S = \{1, 3, 5\}$ en $T = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
a) Bepaal $S \cup T$.
b) Bepaal $S \cap T$.
c) Bepaal $N \backslash (S \cup T)$.

Opgave A.2

Geef verzamelingen S en T zodanig dat $S \cup T = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ en $S \cap T = \{1, 3\}$.

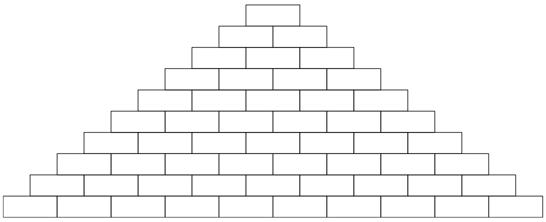
Opgave A.3

Laat $N = \{1, 2, 3\}$. Bepaal alle combinaties van verzamelingen S en T zodanig dat $(S \cup T) \subset N$ en $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

A.2 Het sommatieteken

Voorbeeld A.1: Een driehoek bouwen

Stel dat we een driehoek willen bouwen, beginnend met tien blokken op de onderste rij, negen op de tweede rij, acht op de derde en zo verder tot twee blokken op de negende rij en één op de tiende. Hoeveel blokken zijn er dan nodig? In totaal zijn er dan $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ blokken nodig.



Als de onderste rij uit n blokken bestaat met n een geheel getal, dan zijn er in totaal $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$ blokken nodig. Het totale aantal blokken dat we nodig hebben, is afhankelijk van de waarde van n.

In de wiskunde komt het vaak voor dat je een heleboel getallen bij elkaar op wilt tellen. In het bovenstaande voorbeeld waren we bijvoorbeeld geïnteresseerd in de som $1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$. Er is in de wiskunde behoefte aan een notatie om een som kort en overzichtelijk weer te geven. Deze paragraaf houdt zich bezig met hoe we dat in de wiskunde doen.

Om een som kort en overzichtelijk weer te geven is in de wiskunde het sommatieteken Σ ingevoerd. De letter Σ is de hoofdletter sigma uit het Griekse alfabet en staat dus voor het nemen van een som. Als je de notatie

$$\sum_{k=1}^{23} u_k$$

tegenkomt, dan betekent dat het volgende: vul in u_k achtereenvolgens $k = 1$, $k = 2$, ..., $k = 23$ in en tel de 23 getallen die je op deze manier krijgt $(u_1, u_2, \ldots, u_{23})$ bij elkaar op.

Voorbeeld A.2: Uitwerken sommatieteken

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} (k^2 + k) &= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5) \\ &= 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70.\end{aligned}$$

Merk op dat we in de uitdrukking $(k^2 + k)$ dus achtereenvolgens $k = 1$, $k = 2$ tot en met $k = 5$ invullen en deze uitkomsten vervolgens bij elkaar optellen om de uitkomst van de som te krijgen.

In bovenstaand voorbeeld zien we dat $\sum_{k=1}^{5} (k^2 + k)$ gewoon een getal is en dat dit getal niet van de letter k afhangt. Immers voor k vullen we achtereenvolgens de getallen één tot en met vijf in. De variabele k komt dus niet in het eindantwoord voor. We hadden voor k ook een willekeurige andere letter kunnen kiezen, zonder dat de waarde van de som verandert: als je $\sum_{j=1}^{5}(j^2+j)$ uitwerkt, dan krijg je opnieuw 70.

Voorbeeld A.3: Een driehoek bouwen

Bij het bouwen van de driehoek met een onderste laag van 10 blokken zijn er in totaal $1+2+\cdots+10$ blokken nodig. Met behulp van het sommatieteken kunnen we dit aantal ook schrijven als $\sum_{k=1}^{10} k$. Voor een driehoek met een onderste laag die n blokken groot is, zijn er $\sum_{k=1}^{n} k$ blokken nodig.

Opgave A.4

Stel we willen een piramide bouwen met behulp van blokken, waarbij de bovenste laag uit één blok bestaat, de tweede laag uit vier blokken, de derde laag uit negen blokken en zo verder.

a) Hoeveel blokken heb je nodig als je een piramide bouwt van 5 lagen? Hoe kun je dit aantal met een sommatieteken weergeven?
b) Geef met behulp van een sommatieteken weer hoeveel blokken er nodig zijn als je een piramide wilt bouwen met n lagen, waarbij n een geheel getal is.

Opgave A.5

Schrijf met behulp van het sommatieteken:

a) $2+4+6+8+10+12$.
b) $2+4+6+\cdots+2(n-1)+2n$, met n een geheel getal.
c) $1+3+5+7+9+11$.
d) $1+3+5+\ldots+2n-1+2n+1$.
e) $1+4+7+\cdots+(3n+1)$, met n een geheel getal.

Opgave A.6

a) Bereken $\sum_{k=1}^{5} 2$ en $\sum_{k=1}^{8} 2$.
b) Laat n een geheel getal zijn, druk $\sum_{k=1}^{n} 2$ uit in n.

Soms kan je een sommatie op verschillende manieren uitrekenen, door de termen op een andere manier te rangschikken. Het volgende voorbeeld maakt dit duidelijk.

Voorbeeld A.4: Eigenschappen sommatieteken

We kunnen $\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$ herschrijven tot

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k^2+k) &= (1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+(4^2+4)+(5^2+5)\\ &= (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)+(1+2+3+4+5)\\ &= \sum_{k=1}^{5}k^2+\sum_{k=1}^{5}k.\end{aligned}$$

De som $\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)$ kan dus ook berekend worden door de sommaties $\sum_{k=1}^{5}k^2$ $(=55)$ en $\sum_{k=1}^{5}k(=15)$ uit te rekenen en bij elkaar op te tellen. ◀

Voorbeeld A.5: Eigenschappen sommatieteken

We berekenen op twee manieren $\sum_{k=1}^{5}2k$. Allereerst door alle termen te berekenen en op te tellen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}2k &= 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5\\ &= 2+4+6+8+10=30.\end{aligned}$$

Maar we hadden ook kunnen schrijven:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}2k &= 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5\\ &= 2(1+2+3+4+5)\\ &= 2\sum_{k=1}^{5}k=2\cdot15=30.\end{aligned}$$

Beide berekeningen leveren hetzelfde antwoord op. ◀

De eigenschappen die we in bovenstaande voorbeelden gezien hebben, kunnen veel algemener geformuleerd worden.

Eigenschappen sommatieteken

1. $\sum_{k=1}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n}v_k$
2. $\sum_{k=1}^{n}c\cdot u_k=c\sum_{k=1}^{n}u_k$

Voorbeeld A.6: Eigenschappen sommatieteken

Merk op dat we in het eerste voorbeeld eigenschap 1 van het sommatieteken toepassen met $u_k = k^2$, $v_k = k$ en $n = 5$. In het tweede voorbeeld wordt de tweede eigenschap toegepast met $c = 2$, $u_k = k$ en $n = 5$.

Opgave A.7

a) Bereken $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$ door alle zes de termen te berekenen en bij elkaar op te tellen.

b) Bereken nogmaals $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$ maar nu door gebruik te maken van de eigenschappen van het sommatieteken.

A.3 Rekenen met vectoren

In de wiskunde wordt vaak gebruik gemaakt van vectoren. Dit kan handig zijn als je bijvoorbeeld punten in het platte vlak weer wilt geven. Of in speltheorie waarbij een (verdelings)vector een verdeling van de winst over alle spelers weergeeft. In feite zijn getallen ook vectoren, maar dan van lengte één. We zijn gewend om getallen op te tellen, af te trekken en te vermenigvuldigen. Dit kunnen we ook doen met vectoren. We spreken af dat we vectoren bij elkaar mogen optellen of van elkaar mogen aftrekken als deze dezelfde lengte hebben en dat we dit optellen/aftrekken componentsgewijs doen. Dus:

$$(5,3,2) + (0,3,1) = (5+0, 3+3, 2+1) = (5,6,3).$$

Evenzo

$$(5,3,2) - (0,3,1) = (5-0, 3-3, 2-1) = (5,0,1)$$

en

$$(0,3,1) - (5,3,2) = (0-5, 3-3, 1-2) = (-5,0,-1).$$

Daarnaast kunnen we vectoren ook met een getal vermenigvuldigen, we spreken af dat we dit doen door elk getal in de vector met dit getal te vermenigvuldigen. Dus

$$2 \cdot (5,3,2) = (2 \cdot 5, 2 \cdot 3, 2 \cdot 2) = (10,6,4)$$

en

$$\frac{1}{6} \cdot (5,3,2) = (\frac{1}{6} \cdot 5, \frac{1}{6} \cdot 3, \frac{1}{6} \cdot 2) = (\frac{5}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}).$$

B

Antwoorden

B.1 Coöperatieve spelen

Opgave 1.1

a. Alle mogelijke deelverzamelingen van N zijn: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ en N.

b. Dit zijn er twee keer zoveel, de extra speler kan wel of niet bij iedere deelverzameling van twee spelers horen.

c. Deze heeft $2^4 = 16$ deelverzamelingen.

d. De verzameling $\{1,\ldots,n\}$ heeft 2^n deelverzamelingen.

Opgave 1.2

a. Het coöperatieve spel is weergegeven in onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	0	100	200

b. Het coöperatieve spel is weergegeven in onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	100	200	200	400

Opgave 1.3

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	20	45	20	65	55	80	105

Opgave 1.4

Noem de partijen PvdA, CDA, VVD en de lokale partij respectievelijk speler 1, 2, 3 en 4. Dan is het bijbehorende coöperatieve spel gelijk aan

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1	0	0

S	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$v(S)$	0	1	1	1	1	1

Opgave 1.5
Het kostenbesparingsspel is weergegeven in onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	10	11	18

Opgave 1.6
Het coöperatieve spel kan bepaald worden door voor elke coalitie de goedkoopste verdeling van de opdrachten over de beschikbare machines te zoeken. Dit levert de kosten met samenwerken op. Het coöperatieve spel is gegeven in onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
kosten zonder samenw.	6	5	6	11	12	11	17
kosten met samenw.	6	5	6	7	5	8	8
$v(S)$	0	0	0	4	7	3	9

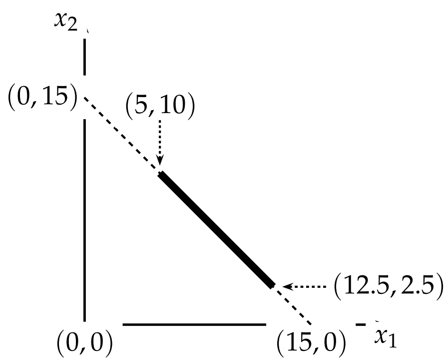
Opgave 1.7
We noemen Bas speler 1 en Chris speler 2.

a. Het coöperatieve spel is weergegeven in onderstaande tabel:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	5	2.50	15

b. We willen in het (x_1, x_2) alle stabiele verdelingen tekenen die horen bij dit spel. Volgens de definitie moet een stabiele verdeling voldoen aan de volgende (on)gelijkheden:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= v(\{1,2\}) = 15, \\ x_1 &\geq v(\{1\}) \ \ = 5, \\ x_2 &\geq v(\{2\}) \ \ = 2.5. \end{aligned}$$

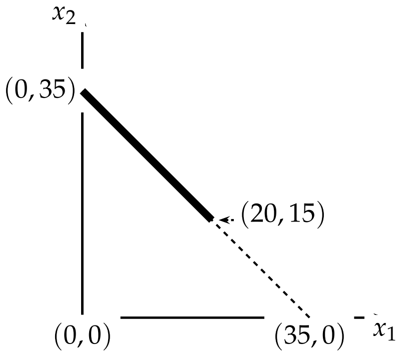


Figuur B.1: Grafische weergave stabiele verdelingen bij opgave 1.7.

Opgave 1.8
a. Het coöperatieve spel is weergegeven in onderstaande tabel:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(S)$	0	15	35

b. De stabiele verdelingen zijn:



Figuur B.2: Grafische weergave stabiele verdelingen bij opgave 1.8.

Opgave 1.9

a) De imputatieverzameling is leeg als $a > 12$.
b) De imputatieverzameling bestaat uit één punt als $a = 12$ (en wel het punt $(x_1, x_2) = (5,7)$).
c) De imputatieverzameling bestaat uit oneindig veel punten als $a < 12$.

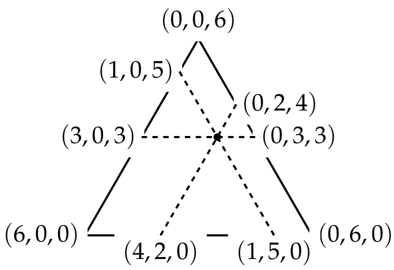
Opgave 1.10

a) Omdat $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ en $v(N) = 10$ geldt dat dit spel een niet lege imputatieverzameling heeft. De verdeling $(2,3,5)$ ligt bijvoorbeeld in de imputatieverzameling.
b) Omdat $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ en $v(N) = 10$ volgt uit de stelling dat dit spel een lege imputatieverzameling heeft.

Opgave 1.11
In conditie (b) wordt voor elke deelverzameling van N een ongelijkheid gegeven, behalve voor de verzamelingen $\emptyset$ en N. Omdat er in totaal 2^n deelverzamelingen zijn van $\{1,\ldots,n\}$ (zie opgave 1.1), geldt er dat er in totaal $2^n - 2$ ongelijkheden worden beschreven bij conditie (b).

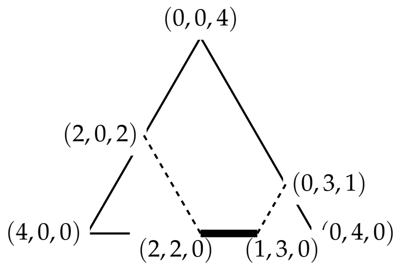
Opgave 1.12
a. De verdeling $(30,50,25)$ ligt niet in de core, want $x_2 + x_3 = 75 < 80 = v(\{2,3\})$. De verdeling $(25,45,35)$ ligt wel in de core, elke coalitie krijgt minstens evenveel uitbetaald als de waarde van deze coalitie in het spel. De verdeling $(15,50,40)$ ligt niet in de core, want $x_1 = 15 < 20 = v(\{1\})$. De verdeling $(20,45,35)$ ligt niet in de core, omdat $x_1 + x_x + x_3 = 100 \neq 105 = v(N)$.
b. Ieder van de verdelingen $(20,45,40)$, $(25,45,35)$ en $(21,46,38)$ liggen in de core.

Opgave 1.13
a) De core bestaat uit één punt en wel het punt $(1,2,3)$.



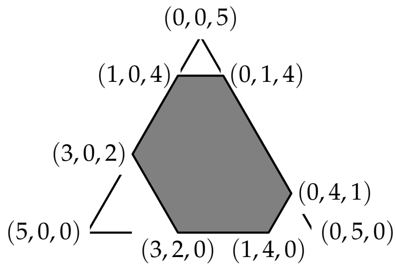
Figuur B.3: De core van opgave 1.13a).

b) De core bestaat uit het lijnstuk met als eindpunten $(2,2,0)$ en $(1,0,3)$.



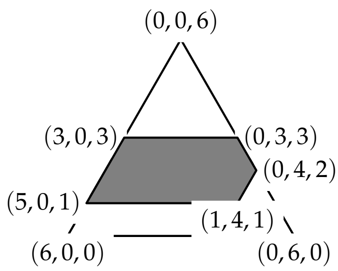
Figuur B.4: De core van opgave 1.13b).

c) De core is weergegeven in figuur B.5



Figuur B.5: De core van opgave 1.13c).

d) De core is getekend in figuur B.6.



Figuur B.6: De core van opgave 1.13d).

Opgave 1.14

a) In het punt $(1,2,3)$ zijn de ongelijkheden die horen bij de drie tweepersoonscoalities bindend.

b) De extreme punten zijn $(2,2,0)$ en $(1,3,0)$. Bij het punt $(2,2,0)$ zijn de ongelijkheden die horen bij de coalities $\{3\}$, $\{1,2\}$ en $\{2,3\}$ binden. Bij het punt $(1,3,0)$ zijn de ongelijkheden van de coalities $\{3\}$, $\{1,2\}$ en $\{1,3\}$ bindend.

c) De extreme punten van de core en de coalities waarvan de bijbehorende ongelijkheden bindend zijn, zijn te vinden in onderstaande tabel.

extreem punt	coalities
$(1,0,4)$	$\{2\}$ en $\{1,2\}$
$(0,1,4)$	$\{1\}$ en $\{1,2\}$
$(0,4,1)$	$\{1\}$ en $\{1,3\}$
$(1,4,0)$	$\{3\}$ en $\{1,3\}$
$(3,2,0)$	$\{3\}$ en $\{2,3\}$
$(3,0,2)$	$\{2\}$ en $\{2,3\}$

d) De extreme punten zijn $(3,0,3)$, $(0,3,3)$, $(0,4,2)$, $(1,4,1)$ en $(5,0,1)$. Voor het extreme punt $(3,0,3)$ zijn de ongelijkheden die horen bij de coalities $\{2\}$ en $\{1,2\}$ bindend, immers er geldt $x_2 = 0$ en $x_1 + x_2 = 3$.

In onderstaande tabel zijn alle extreme punten gegeven en daarnaast de coalitie waarvoor de bijbehorende ongelijkheden bindend zijn.

extreem punt	coalities
$(3,0,3)$	$\{2\}$ en $\{1,2\}$
$(0,3,3)$	$\{1\}$ en $\{1,2\}$
$(0,4,2)$	$\{1\}$ en $\{1,3\}$
$(1,4,1)$	$\{3\}$ en $\{1,3\}$
$(5,0,1)$	$\{2\}$, $\{3\}$ en $\{2,3\}$

Opgave 1.15

a) De verdeling $(2,3,5)$ ligt in de core.

b) De verdeling $(2,3,5)$ ligt in de core, maar is geen extreem punt, geen enkele ongelijkheid is bindend. De verdelingen $(2,2,6)$ en $(0,7,3)$ zijn wel extreme punten van de core. Voor $(2,2,6)$ zijn de ongelijkheden horend bij de coalities $\{2\}$ en $\{1,2\}$ bindend en voor $(0,7,3)$ zijn de ongelijkheden van $\{1\}$ en $\{1,3\}$ binden. Het punt $(4,0,6)$ heeft weliswaar twee coalities van welke de bijbehorende ongelijkheden bindend zijn, maar dit punt ligt niet in de core en kan daarom geen extreem punt zijn.

Opgave 1.16

a. Het bijbehorende coöperatieve spel is gelijk aan:

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$
$v(S)$	4	9	4	3	13	11	9	16	14

S	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$v(S)$	7	21	18	14	19	26

b. Daarvoor geldt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26$.

c. De condities voor de eenpersoonscoalities zijn: $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 9$, $x_3 \geq 4$ en $x_4 \geq 3$.

d.

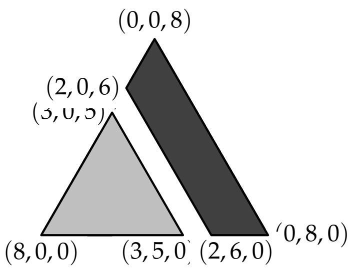
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \geq 21 \quad &\Rightarrow \quad x_4 \leq 5,\\
x_1 + x_2 + x_4 \geq 18 \quad &\Rightarrow \quad x_3 \leq 8,\\
x_1 + x_3 + x_4 \geq 14 \quad &\Rightarrow \quad x_2 \leq 12,\\
x_2 + x_3 + x_4 \geq 19 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \leq 7.
\end{aligned}$$

e. Een core-element is de verdeling $(7,12,4,3)$.

Opgave 1.17

Volgens de core condities toegepast op coalitie $\{1\}$ en $\{2,3\}$ moet gelden: $x_1 \geq v(\{1\}) = 3$ en $x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 6$. Wanneer je deze ongelijkheden bij elkaar optelt krijg je $x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$, dit is in tegenspraak met de conditie $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\}) = 8$.

Grafisch is dit in figuur B.7 te zien. Core elementen moeten in het lichtgrijze gebied liggen, omdat voor die verdelingen geldt dat $x_1 \geq 3$, maar ook in het donkergrijze gebied, omdat daar $x_2 + x_3 \geq 6$. Omdat het licht- en donkergrijze gebied geen punten gemeenschappelijk hebben, is de core leeg.



Figuur B.7: Een lege core.

Opgave 1.18

Laat (N,v) een driepersoonsspel zijn zodanig dat

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) > 2v(\{1,2,3\}).$$

Stel dat de core niet leeg is. Dan is er een verdeling (x_1, x_2, x_3) die in de core ligt. Voor deze verdeling geldt volgens conditie (b), toegepast op de tweepersoonscoalities, dat

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq v(\{1,2\}), \\
x_1 + x_3 &\geq v(\{1,3\}), \\
x_2 + x_3 &\geq v(\{2,3\}).
\end{aligned}
$$

Wanneer we deze ongelijkheden bij elkaar optellen, dan vinden we dat

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}).$$

Omdat $v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) > 2v(\{1,2,3\})$, geldt er dus dat

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) > 2v(\{1,2,3\}).$$

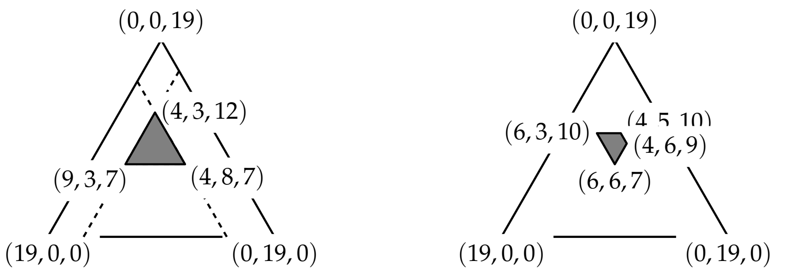
Maar dit is in tegenspraak met conditie (a) die zegt dat $x_1 + x_2 + x_3 = v(\{1,2,3\})$. Dus de core van dit spel is leeg.

Opgave 1.19

a) Noem Hendri speler 1, Marcel speler 2 en Marloes speler 3. Het coöperatieve spel dat deze situatie weergeeft is

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	4	3	7	9	13	13	19

b) De core van dit spel is weergegeven in figuur B.8.



Figuur B.8: Links de imputatieverzameling en rechts de core van het spel van opgave 1.19.

c) De verdelingen in de core kun je interpreteren als verdelingen van het groepspunt van Hendri, Marcel en Marloes, waarbij ieder individu tenminste evenveel krijgt als wanneer deze alleen zou werken en ook elk groepje van twee krijgt samen tenminste evenveel punten als dat zij zouden krijgen als ze samen de opdracht zouden maken.

Opgave 1.20

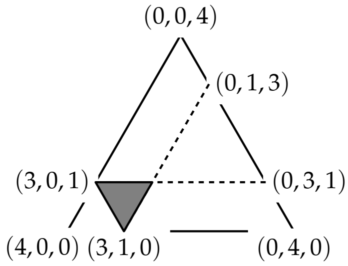
a) Drie verschillende core-elementen zijn bijvoorbeeld $(4, 14, 6)$, $(4, 12, 8)$ en $(3.7, 14, 6.3)$.
b) Drie verschillende core-elementen zijn bijvoorbeeld $(3, 2, 4, 1)$, $(5, 2, 3, 0)$ en $(2, 3, 3, 2)$.

Opgave 1.21

a) Kosten met en zonder samenwerking en het bijbehorende coöperatieve spel zijn weergegeven in onderstaande tabel.

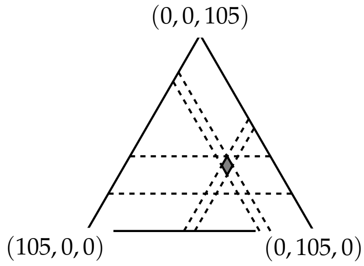
S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
kosten zonder samenw.	5	1	2	6	7	3	8
kosten met samenw.	5	1	2	3	4	2	4
$v(S)$	0	0	0	3	3	1	4

b) De core is weergegeven in figuur B.9. De hoekpunten zijn $(3, 0, 1)$, $(3, 1, 0)$ en $(2, 1, 1)$.



Figuur B.9: Core van het spel van opgave 1.21.

Opgave 1.22
De hoekpunten van de core zijn $(25,50,30)$, $(25,45,35)$, $(20,50,35)$ en $(20,45,40)$. Dit levert het plaatje zoals in figuur B.10.



Figuur B.10: Core van het spel van opgave 1.22.

Opgave 1.23
Voor een verdeling (x_1,x_2,x_3) in de core moet gelden dat $x_1+x_2+x_3=8$ en $x_i \geq 0$ voor $i=1,2,3$. Daarnaast moeten de ongelijkheden

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geq 4, \\ x_1+x_3 &\geq q, \\ x_2+x_3 &\geq 5. \end{aligned}$$

Wanneer we deze ongelijkheden optellen, dan vinden we dat $2(x_1+x_2+x_3) \geq 4+5+q$. Combineren we dat met $x_1+x_2+x_3=8$ dan vinden we dat

a) de core leeg is voor $q>7$,
b) de core uit één punt bestaat voor $q=7$,
c) de core uit oneindig veel punten bestaat voor $q<7$.

Opgave 1.24
Twee spelen (N,v) en (N,w) die aan deze eisen voldoen zijn weergegeven in onderstaande tabel.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	1	1	1	1	0	0	3
$w(S)$	0	0	0	2.5	2	1.5	3

Voor het spel (N,v) is het enige core-element $(1,1,1)$ en voor het spel (N,w) is $(1.5,1,0.5)$ het enige core-element

Opgave 1.25

a) Als $c \leq 6$, dan is de core van dit spel niet leeg, want de verdeling $(3,3,3)$ ligt dan in de core. Als $c>6$, dan is de core leeg (zie ook opgave 1.18). Dus voor alle $c \leq 6$ is de core niet leeg.

b) Als $c \leq \frac{2d}{3}$, dan is de core van dit spel niet leeg, want de verdeling $(\frac{d}{3}, \frac{d}{3}, \frac{d}{3})$ ligt dan in de core. Als $c > \frac{2d}{3}$, dan is de core leeg (zie ook opgave 1.18). Dus voor alle $c \leq \frac{2d}{3}$ is de core niet leeg.

Opgave 1.26
We merken op dat de verdeling $(v(\{1\}, \dots, v(\{n\}))$ in de imputatieverzameling ligt. Dit is ook de enige verdeling die aan de condities van de imputatieverzameling voldoet. Immers als $(x_1, \dots, x_n)$ in de imputatieverzameling ligt, dan moet gelden $x_i \geq v(\{i\})$ voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$ en $x_1 + \dots + x_n = v(\{1, \dots, n\}) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, maar de enige verdeling die hieraan voldoet is $(v(\{1\}, \dots, v(\{n\}))$, dus dit is inderdaad de enige verdeling in de imputatieverzameling. De core van dit spel is gelijk aan de imputatieverzameling, want de verdeling $(v(\{1\}, \dots, v(\{n\}))$ ligt ook in de core elk core-element is ook altijd een element van de imputatieverzameling, dus dit is meteen het enige element.

Opgave 1.27

a) Voor een core-element (x_1, x_2, x_3) geldt $x_1 + x_2 + x_3 = v(N)$, omdat $(1, 0, 1)$ in de core ligt, geldt dat $v(N) = 2$.

b) Uit het feit dat $(1, 0, 1)$ in de core ligt, volgt dat

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &\leq 1, \\ v(\{2\}) &\leq 0, \\ v(\{3\} &\leq 1, \\ v(\{1,2\}) &\leq 1, \\ v(\{1,3\}) &\leq 2, \\ v(\{2,3\} &\leq 1. \end{aligned}$$

Uit het feit dat $(1, 0, 1)$ in de core ligt, volgt dat

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &\leq 2, \\ v(\{2\}) &\leq 0, \\ v(\{3\} &\leq 0, \\ v(\{1,2\}) &\leq 2, \\ v(\{1,3\}) &\leq 2, \\ v(\{2,3\} &\leq 0. \end{aligned}$$

c) Als we de ongelijkheden uit onderdeel b) paarsgewijs bij elkaar optellen vinden we dat

$$\begin{aligned} 2v(\{1\}) \leq 3 \quad &\Rightarrow \quad v(\{1\}) \leq 1\tfrac{1}{2}, \\ 2v(\{2\}) \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad v(\{2\}) \leq 0, \\ 2v(\{3\} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad v((\{3\}) \leq \tfrac{1}{2}, \\ 2v(\{1,2\}) \leq 3 \quad &\Rightarrow \quad v(\{1,2\}) \leq 1\tfrac{1}{2}, \\ 2v(\{1,3\}) \leq 4 \quad &\Rightarrow \quad v(\{1,3\}) \leq 2, \\ 2v(\{2,3\} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad v(\{2,3\}) \leq \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) Ja, immers als je de eerste zes ongelijkheden uit onderdeel b) met a vermenigvuldigt en paarsgewijs optelt bij de laatste zes ongelijkheden uit onderdeel b) die je met $1 - a$ vermenigvuldigt, dan krijg je:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &\leq a \cdot 1 + (1-a) \cdot 2 = 2 - a, \\ v(\{2\}) &\leq 0, \\ v(\{3\} &\leq a, \\ v(\{1,2\}) &\leq 2 - a, \\ v(\{1,3\}) &\leq 2a + 2(1-a) = 2, \\ v(\{2,3\} &\leq a. \end{aligned}$$

Deze ongelijkheden geven aan dat de verdeling $(2 - a, 0, a)$ in de core ligt.

Opgave 1.28
Uit conditie a) van de core volgt dat $2t + 19 = 2t + r$, dus $r = 19$. De ongelijkheden die volgen uit conditie b) zijn

$$\begin{aligned} 2t &\geq t+5, \\ 10 &\geq 5, \\ 9 &\geq 7, \\ 2t+10 &\geq 2t, \\ 2t+9 &\geq 3t+4, \\ 19 &\geq 14. \end{aligned}$$

Uit de eerste ongelijkheid volgt $t \geq 5$, uit de vijfde $t \leq 5$ alle overige ongelijkheden gelden altijd. De enige mogelijkheid is dus $t = 5$.

Opgave 1.29
Dit spel heeft een lege core. Voor een verdeling (x_1, x_2, x_3, x_4) in de core moet (onder andere) gelden dat

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 &\geq 6, \\ x_1 + x_3 + x_4 &\geq 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 &\geq 5. \end{aligned}$$

Tellen we deze vier ongelijkheden op, dan vinden we dat

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq 22,$$

maar dit is in tegenspraak met de conditie dat $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = v(N) = 7$. Dus de core is leeg.

B.2 Voorkennis

Opgave A.1
a) $S \cup T = \{1,2,3,4,5,6\}$.
b) $S \cap T = \{3,5\}$.
c) $N \backslash (S \cup T) = N \backslash \{1,2,3,4,5,6\} = \{7\}$.

Opgave A.2
Een mogelijk antwoord is $S = \{1,3,5\}$ en $T = \{1,3,7,9\}$.

Opgave A.3
In onderstaande tabel zijn voor elke deelverzameling S alle deelverzamelingen T gegeven zodanig dat $S \cup T \subset N$ en $S \cap T = \emptyset$.

S	T
$\emptyset$	$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, N
$\{1\}$	$\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,3\}$
$\{2\}$	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$
$\{3\}$	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$, $\{3\}$
$\{1,3\}$	$\emptyset$, $\{2\}$
$\{2,3\}$	$\emptyset$, $\{1\}$
N	$\emptyset$

Opgave A.4
a) In totaal zijn er dan $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$ blokken nodig, we kunnen dit ook schrijven als $\sum_{k=1}^{5} k^2$.

b) Voor een piramide met n lagen zijn er $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ blokken nodig.

Opgave A.5

a) $\sum\limits_{k=1}^{6} 2k$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{6}(2k-1)$ of $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$.

d) $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)$ of $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$.

e) $\sum\limits_{k=0}^{n}(3k+1)$ of $\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2)$.

Opgave A.6

a) $\sum\limits_{k=1}^{5} 2 = 10$ en $\sum\limits_{k=1}^{8} 2 = 16$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2 = 2n$

Opgave A.7

a) $\sum\limits_{k=0}^{5}(2k+1) = 1+3+5+7+9+11 = 36$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{5}(2k+1) = 2\sum\limits_{k=0}^{5} k + \sum\limits_{k=0}^{5} 1 = 2 \cdot 15 + 6 = 36$.